Allgemeine Residuiertheit und Hüllenstrukturen

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math. Adrian Pigors

geboren am 24. 02. 1975 in Hannover

2010

Referent: Prof. Dr. Marcel Erné

Korreferent: Prof. Dr. Bernhard Ganter

Tag der Promotion: 08. 11. 2010

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine allgemeine Theorie der mehrstelligen residuierten Abbildungen zwischen geordneten Mengen entwickelt. Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf residuierten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen und ihrer Darstellung durch Relationen. Die erzielten Resultate haben Anwendungen in zahlreichen Disziplinen – darunter Algebra, Logik und Formale Begriffsanalyse – und bilden insbesondere die Grundlage für eine umfassende Theorie der relationalen und algebraischen Semantik substruktureller Logiken.

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die allgemeine Residuiertheit endlichstelliger Funktionen, welche analog zur gewöhnlichen Residuiertheit von binären Operationen koordinatenweise auf Adjunktionen zurückgeführt wird. Darüber hinaus berücksichtigen wir systematisch die möglichen Dualisierungen der zugrundeliegenden geordneten Mengen und führen einen verallgemeinerten Residual-Begriff ein.

Als adäquate Voraussetzung für weite Teile der Theorie erweisen sich dann superalgebraische Verbände. Unter anderem zeigen wir, wie Funktionen zwischen superalgebraischen Verbänden über eine fundamentale Adjunktion mit Relationen zwischen den zugehörigen Spektren verbunden sind, und leiten daraus eine kanonische Darstellung residuierter Abbildungen durch Relationen ab. Speziell für Potenzmengenverbände erhalten wir eine für die Anwendungen nützliche Verallgemeinerung von Axialitäten und Polaritäten.

Hüllenstrukturen, d. h. mit einer Hüllenoperation versehene geordnete Mengen, sind ein weiteres zentrales Thema der Arbeit. Vorrangig analysieren wir Funktionen zwischen Hüllenstrukturen in Hinsicht auf induzierte Funktionen zwischen Hüllenbereichen. Dies führt auf einige grundlegende Eigenschaften und insbesondere auf die Stetigkeit von Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen. Wir charakterisieren diese Grundbegriffe für verschiedene Klassen von Funktionen und entwickeln einen einheitlichen theoretischen Rahmen, in den sich bisher unverbundene Fakten aus verschiedenen Bereichen systematisch einordnen lassen.

Besonders intensiv untersuchen wir residuierte Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen. Ein wichtiges Ergebnis ist dabei die Bestimmung derjenigen residuierten Abbildungen, die unter geeigneten Voraussetzungen bijektiv mit den residuierten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen korrespondieren. Insgesamt gelangen wir zu einem einheitlichen Darstellungssatz für alle verallgemeinerten residuierten Funktionen und ihre Residuale, der die bisher bekannten Fälle erheblich erweitert. Eine wesentliche Rolle spielen hier die superalgebraischen Hüllenstrukturen und eine Verschärfung der Stetigkeit zur sogenannten Vollstetigkeit.

Mit Hilfe der allgemeinen Resultate für Hüllenstrukturen begründen wir schließlich eine Theorie der Relationen zwischen Hüllenräumen und speziell zwischen Kontexten der Formalen Begriffsanalyse. Stetige und vollstetige Relationen werden zudem als Morphismen betrachtet, und wir beweisen eine Vielzahl kategorieller Äquivalenzen im Zusammenhang mit Hüllenräumen, Hüllenstrukturen und vollständigen Verbänden. Unter anderem konstruieren wir eine Hüllenraum-Kategorie, die äquivalent ist zur Kategorie der vollständigen Verbände und vollständigen Homomorphismen.

Schlagwörter: Residuale, Hüllenstrukturen, stetige Relationen

Abstract

In this thesis, we develop a general theory of residuated mappings between partially ordered sets. Special emphasis is placed on residuated functions between closure ranges and their representation by means of relations. The obtained results have applications in many areas, including algebra, logic and formal concept analysis. In particular, they provide the basis for a comprehensive theory of relational and algebraic semantics for substructural logics.

The starting point of our studies is the generalized residuation of maps in several variables. This is defined via coordinatewise adjunctions, in analogy to the well-known residuation of binary operators. Moreover, we systematically incorporate the possible dualizations of the underlying partially ordered sets and introduce a generalized concept of residuals.

For a large part of the presented theory, superalgebraic lattices prove to be the appropriate setting. Among other things, we show how functions between superalgebraic lattices are fundamentally connected with relations between the associated join spectra by an adjunction. From that, we derive a canonical representation of residuated functions using relations. For power set lattices specifically, this yields a useful generalization of axialities and polarities.

Closure structures, meaning partially ordered sets equipped with a closure operation, constitute another central theme of the thesis. We primarily analyze functions between closure structures in terms of their induced functions between closure ranges. This leads us to several essential properties of mappings with respect to closure operations, among them continuity. For various classes of functions, we provide numerous characterizations of these basic concepts and develop an extensive theoretical framework. That allows us to classify and connect previously unrelated facts from different areas.

Specifically, we study residuated maps between closure structures. As an important result, we identify those residuated functions that, under suitable assumptions, correspond bijectively with residuated mappings between closure ranges. We obtain a uniform representation theorem for all generalized residuated functions and their residuals, extending the known cases significantly. Here, a central role is played by superalgebraic closure structures, as well as a special form of continuity: the so-called complete continuity.

By means of the general results on closure structures, we finally establish a theory of relations between closure spaces and, in particular, between the formal contexts of formal concept analysis. In addition, continuous and completely continuous relations are utilized as morphisms. We obtain a number of categorical equivalences between closure spaces, closure structures, and complete lattices. In particular, we construct a category of closure spaces that is equivalent to the category of complete lattices and complete homomorphisms.

Keywords: residuals, closure structures, continuous relations

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Residuierte Abbildungen zwischen geordneten Mengen sind als ordnungstheoretischer Spezialfall adjungierter Funktoren in den verschiedensten mathematischen Gebieten allgegenwärtig (siehe etwa [38] und [34]). Auch zweistellige residuierte Funktionen – also solche, die in beiden Variablen residuiert sind – spielen in Algebra, Logik und zahlreichen weiteren Disziplinen eine wichtige Rolle und bilden insbesondere die Grundlage für residuierte algebraische Strukturen wie residuierte Verbände oder Quantale ([42], [82]).

Eine zweistellige Abbildung $\circ\colon P_1 \times P_2 \to Q$ zwischen geordneten Mengen ist genau dann residuiert (in jeder Variablen), wenn Abbildungen $\leftarrow\colon Q \times P_2 \to P_1$ und $\to\colon P_1 \times Q \to P_2$ existieren, so dass die folgende Residuiertheitsbedingung gilt:

$$x_1 \circ x_2 \leq y \iff x_1 \leq y \leftarrow x_2 \iff x_2 \leq x_1 \to y.$$

Die beiden Residuale $\leftarrow$ und $\to$ sind in diesem Fall selbst wieder residuiert, sofern sie als zweistellige Abbildungen $\leftarrow\colon Q^{\mathrm{op}} \times P_2 \to P_1^{\mathrm{op}}$ und $\to\colon P_1 \times Q^{\mathrm{op}} \to P_2^{\mathrm{op}}$ aufgefasst werden.

Es ist naheliegend, die Residuiertheit von ein- und zweistelligen auf beliebige endlichstellige Abbildungen zu verallgemeinern und außerdem die möglichen Dualisierungen aller beteiligten geordneten Mengen zu berücksichtigen. Dies wurde für Operationen zuerst von Dunn [20] im Rahmen der sogenannten Gaggle-Theorie unternommen. Allerdings fehlt in der Literatur neben einer flexiblen Notation vor allem eine systematische Untersuchung der Residuale mehrstelliger residuierter Funktionen. In dieser Arbeit wird daher unter besonderer Berücksichtigung der Residuale als erstes die Theorie der *allgemeinen Residuiertheit* entwickelt. Die Residuiertheit n-stelliger Funktionen wird dabei analog zum zweistelligen Fall durch eine Residuiertheitsbedingung mit n Residualen festgelegt. Zusammen mit einer *Signatur* $(\sigma; \tau) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau)$, bestehend aus Vorzeichen, welche für die zugrundeliegenden geordneten Mengen jeweils markieren, ob die gegebene oder ihre duale Ordnung betrachtet wird, ergibt sich der allgemeine Begriff der *$(\sigma; \tau)$-Residuiertheit*. In diesem Sinne ist beispielsweise das oben erwähnte Residual $\to$ eine $(+, -; -)$-residuierte Abbildung von $P_1 \times Q$ in P_2.

Eine zentrale Stellung nimmt die allgemeine Residuiertheit in der Theorie der *substrukturellen Logiken* ein (siehe Restall [80] für eine Einführung; die Kenntnis solcher Logiken wird zum Verständnis der vorliegenden Arbeit jedoch nicht benötigt). Der Grund ist, dass substrukturelle Logiken als diejenigen Logiken charakterisiert werden können, deren algebraische Modelle residuierte Strukturen sind (vgl. etwa [21], [42]). So wird zum Beispiel eine der wichtigsten logischen Verknüpfungen, die Implikation, durch das Residual $\to$ einer binären residuierten Operation $\circ$ algebraisch modelliert.

Eine neuere Entwicklung im Bereich der substrukturellen Logiken ist die *relationale Semantik*, die sich an die aus der Modallogik bekannte Kripke-Semantik anlehnt und n-stellige logische Verknüpfungen mit Hilfe $(n+1)$-stelliger Relationen interpretiert (eine Motivation dieser Semantik wird in [80, Kapitel 11] gegeben). Um mit der relationalen Semantik auch nicht-distributive Logiken behandeln zu können, wurden die zugrundeliegenden Relationalstrukturen von verschiedenen Autoren um Hüllenoperatoren erweitert und in manchen Ansätzen noch mit Ordnungsstrukturen versehen oder zu zweisortigen Strukturen ausgebaut (u. a. in [80, Kapitel 12], [6] und [45]). Die Relationen müssen dann derart beschaffen sein, dass sie beim Übergang zur sogenannten Komplex-Algebra geeignete $(\sigma;\tau)$-residuierte Operationen auf dem entsprechenden Verband der abgeschlossenen Mengen induzieren.

Dies führt auf die folgende Fragestellung, die für viele Anwendungen auch außerhalb der Logik und insbesondere für die Darstellungstheorie allgemeiner residuierter Strukturen interessant ist: Unter welchen Voraussetzungen lassen sich für eine gegebene Signatur $(\sigma;\tau)$ durch Relationen zwischen Hüllenräumen auf kanonische Weise sämtliche $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenverbänden realisieren? Daran schließt sich sofort die Frage an, ob es vielleicht sogar eine bijektive Korrespondenz von gewissen Relationen zwischen Hüllenräumen mit allen $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den Hüllenverbänden gibt. In der Literatur zur relationalen Semantik substruktureller Logiken wurden diese Fragen bisher nur für einige Spezialfälle beantwortet. Wir untersuchen daher systematisch die Beziehung von Relationen und induzierten $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen für alle Signaturen $(\sigma;\tau)$ und entwickeln eine umfassende Theorie, in die sich auch die bekannten Antworten einordnen lassen.

Die geschilderten Fragen werden dabei in zwei separaten Schritten bearbeitet: Zuerst betrachten wir, wie sich $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Potenzmengenverbänden durch Relationen zwischen den Grundmengen realisieren lassen. Danach klären wir zu gegebenen Hüllenoperatoren auf den Grundmengen, unter welchen Voraussetzungen $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Potenzmengenverbänden durch Hüllenbildung alle $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenverbänden induzieren. Es stellt sich heraus, dass beide Schritte in einem deutlich allgemeineren Rahmen behandelt werden können, in dem *superalgebraische Verbände* eine wesentliche Rolle spielen.

Der erste Schritt ergibt sich dann aus dem Verhältnis von $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden und geeigneten Relationen zwischen den $\bigvee$-Spektren dieser Verbände. Der zweite Schritt führt auf die Untersuchung von *Hüllenstrukturen*, worunter wir beliebige geordnete Mengen verstehen, die mit einer Hüllenoperation versehen sind. Die Theorie der Funktionen zwischen Hüllenstrukturen bildet den Schwerpunkt dieser Arbeit, und tatsächlich finden wir für jede Signatur $(\sigma;\tau)$ im Falle geeigneter (superalgebraischer) Hüllenstrukturen eine bijektive Korrespondenz von bestimmten $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen mit allen $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den Hüllenbereichen. Die allgemeinen Ergebnisse für Hüllenstrukturen beantworten dann einerseits durch Spezialisierung auf Hüllenräume die obige Fragestellung und können andererseits in einem breiteren Rahmen angewendet werden.

Durch die Anwendung der allgemeinen Theorie auf Relationen zwischen Hüllenräumen gelangen wir insbesondere zu sogenannten *vollstetigen Relationen*, die in Bijektion zu residuierten Abbildungen zwischen Hüllenverbänden stehen. Eine geeignete Komposition erlaubt sogar die Konstruktion einer Kategorie der Hüllenräume und vollstetigen Relationen, von der wir zeigen können, dass sie zur Kategorie der vollständigen Verbände und residuierten (d. h. $\bigvee$-erhaltenden) Abbildungen äquivalent ist. Wir behandeln eine Vielzahl weiterer kategorieller Äquivalenzen im Zusammenhang mit Hüllenstrukturen, Hüllenräumen und vollständigen Verbänden und können unter anderem Resultate von Erné [27] zu Hüllenraum-Kategorien mit stetigen Funktionen verallgemeinern.

In allen betrachteten Korrespondenzen zwischen Funktionen und Relationen berücksichtigen wir konsequent die natürlicherweise auftretenden geordneten Mengen (mit der punktweisen Ordnung von Abbildungen bzw. der Ordnung von Relationen durch die Mengeninklusion). Außerdem formulieren wir alle kategorientheoretischen Resultate in solchen Kategorien, die über der Kategorie der geordneten Mengen und isotonen Abbildungen angereichert wurden und auch als *lokal geordnete* 2*-Kategorien* bekannt sind. Ein großer Vorteil dieses Vorgehens liegt darin, dass lokal geordnete 2-Kategorien die Definition von *adjungierten* Morphismen erlauben. Diese versetzen uns unter anderem in die Lage, eine Hüllenraum-Kategorie anzugeben, die zur Kategorie der vollständigen Verbände und *vollständigen Homomorphismen* äquivalent ist.

Ein Hauptanliegen dieser Arbeit ist die Entwicklung der grundlegenden Methoden für die Darstellungstheorie allgemeiner residuierter Strukturen (vgl. hierzu auch [50]) und damit für eine einheitliche Theorie der relationalen Semantik, wie sie in [76] skizziert wurde. Ein weiteres Gebiet, auf das sich die Resultate zu Hüllenraum-Kategorien und Relationen zwischen Hüllenräumen gewinnbringend anwenden lassen, ist die *Formale Begriffsanalyse* (siehe [44]). Es ergeben sich sowohl bekannte Theoreme als auch neue Zusammenhänge und Charakterisierungen für Relationen zwischen formalen Kontexten (wie *Bindungen*, *G-Relationen* oder *relationale Infomorphismen*, siehe etwa [43], [59]). Außerdem können aus der allgemeinen Theorie zahlreiche geläufige kategorielle Äquivalenzen für geeignete Kontext-Kategorien systematisch hergeleitet werden (vgl. [35], [59], [69]), und einige von ihnen lassen sich auf interessante Weise modifizieren und verallgemeinern.

Wir skizzieren nun den Aufbau der Arbeit. In Kapitel 1 werden zunächst einige grundlegende Notationen im Zusammenhang mit mehrstelligen Abbildungen und Relationen eingeführt, die im weiteren Verlauf benötigt werden und von denen nicht alle allgemein üblich sind. Danach folgt eine Zusammenstellung der wichtigsten ordnungstheoretischen und kategorientheoretischen Grundlagen. Damit die späteren Ausführungen auch mit wenigen Vorkenntnissen nachvollziehbar sind, werden diese Voraussetzungen relativ ausführlich dargestellt. Zudem werden in den nachfolgenden Kapiteln fast alle Beweise vollständig ausgeführt.

Die Grundlagen der allgemeinen Residuiertheit werden in Kapitel 2 in einer einheitlichen Terminologie entwickelt. Für alle Signaturen $(\sigma;\tau)$ behandeln wir erst $(\sigma;\tau)$-monotone und anschließend $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen mit den zugehörigen $(\sigma;\tau)$-Residualen. Eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Funktion bildet zusammen mit ihren Residualen eine $(\sigma;\tau)$*-residuierte Familie*. Im einstelligen Fall ist eine residuierte Familie dasselbe wie eine ordnungstheoretische Adjunktion, und die wichtigsten Resultate für allgemeine Residuale können im wesentlichen auf bekannte Fakten für gewöhnliche Adjunktionen zurückgeführt werden. Danach erläutern wir lokal geordnete 2-Kategorien und adjungierte Morphismen. Die Mehrzahl der später betrachteten lokal geordneten 2-Kategorien sind sogar sogenannte *Quantaloide*, d. h. ihre Morphismenmengen sind vollständige Verbände und ihre Kompositionsabbildungen in beiden Variablen residuiert. Wir diskutieren daher einige fundamentale Eigenschaften von Quantaloiden und Quantaloid-Homomorphismen.

Der Schwerpunkt von Kapitel 3 liegt auf superalgebraischen Verbänden. Diese stellen die adäquate Voraussetzung zur weiteren Untersuchung der allgemeinen Residuiertheit dar: Einerseits kann jede isotone Abbildung zwischen superalgebraischen Verbänden auf geeignete Weise eindeutig zu einer residuierten Abbildung geglättet werden. Andererseits lässt sich zeigen, dass Funktionen zwischen superalgebraischen Verbänden über eine Adjunktion mit Relationen zwischen den zugehörigen $\bigvee$-Spektren zusammenhängen. Eine wichtige Folgerung ist dann, dass $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden in Bijektion zu sogenannten $(\sigma;\tau)$*-Abschnittsrelationen* zwischen den $\bigvee$-Spektren stehen. Da superalgebraische Verbände bis auf Isomorphie gerade die Abschnittsverbände sind, gelten alle Resultate dieses Kapitels auch für Potenzmengenverbände. Daraus ergibt sich insbesondere die Darstellung der $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Potenzmengenverbänden durch Relationen zwischen den Grundmengen und somit eine Verallgemeinerung der bekannten Axialitäten und Polaritäten zwischen Potenzmengenverbänden.

In Kapitel 4 beginnen wir mit der Untersuchung von Hüllenstrukturen. Zunächst werden einige relevante Eigenschaften von Hüllenstrukturen vorgestellt, und unter anderem wird gezeigt, dass vollständige Verbände genau die Hüllenbereiche superalgebraischer Hüllenstrukturen sind. Danach befassen wir uns hauptsächlich mit Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen und den aus ihnen durch Hüllenbildung induzierten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen. Das führt auf die *Stetigkeit* und *Abgeschlossenheit* von Funktionen zwischen Hüllenstrukturen. Außerdem betrachten wir *bindende*, *innenbindende* und *außenbindende* Abbildungen. Diese Grundbegriffe werden sowohl für beliebige als auch für isotone sowie antitone Abbildungen ausführlich charakterisiert und aufeinander bezogen. Allgemeine Prinzipien, die in vielen konkreten Situationen im Zusammenhang mit Hüllenoperationen auftreten, können auf diese Weise in einer einheitlichen Terminologie dargestellt werden.

Kapitel 5 führt dann die beiden zentralen Themen dieser Arbeit – die allgemeine Residuiertheit und Hüllenstrukturen – zusammen. Wir setzen einerseits die Untersuchung der Grundbegriffe aus dem vorigen Kapitel speziell für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen fort und erhalten für die jeweiligen Signaturen $(\sigma;\tau)$ zahlreiche nützliche Charakterisierungen und Zusammenhänge. Andererseits beantworten wir in mehreren Schritten die Frage, für welche $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen geeigneten Hüllenstrukturen eine kanonische bijektive Korrespondenz mit $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen existiert. Als entscheidender Begriff erweist sich dabei eine Verschärfung der Stetigkeit zur sogenannten *σ-Vollstetigkeit*. Ein besonderer Schwerpunkt liegt auf vollstetigen, residuierten Abbildungen zwischen superalgebraischen Hüllenstrukturen, da ihre Korrespondenz mit residuierten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen zu einer kategoriellen Äquivalenz ausgebaut werden kann.

Die Anwendung der abstrakten Resultate für Funktionen zwischen Hüllenstrukturen auf Relationen zwischen Hüllenräumen erfolgt in Kapitel 6. Sie führt unter anderem auf *$(\sigma;\tau)$-stetige* und *$(\sigma;\tau)$-vollstetige* Relationen zwischen Hüllenräumen sowie auf *Bindungen*. Die Eigenschaften dieser Relationen werden in Hinblick auf mögliche Anwendungen ausführlich beschrieben. Die Stetigkeit von Relationen erweist sich dabei als eine direkte Verallgemeinerung der Stetigkeit von Funktionen im topologischen Sinne. Zum Schluss des Kapitels werden stetige Relationen, vollstetige Relationen und Bindungen speziell zwischen den Kontexten der Formalen Begriffsanalyse betrachtet. Wir ordnen bekannte Begriffe in die allgemeine Theorie ein und erhalten einige interessante neue Charakterisierungen.

In Kapitel 7 werden schließlich Hüllenraum-Kategorien ausführlich untersucht. Insbesondere konstruieren wir die Kategorie der Hüllenräume und vollstetigen Relationen und zeigen ihre Äquivalenz mit der Kategorie der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen. Auch der Zusammenhang mit Hüllenstruktur-Kategorien wird erläutert, und durch Beschränkung auf geeignete Unterkategorien ergeben sich zahlreiche weitere kategorielle Äquivalenzen, darunter solche für Kontext-Kategorien.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Marcel Erné für die hilfreiche Betreuung dieser Dissertation. Mai Gehrke und Bernhard Ganter danke ich für anregende Diskussionen. Außerdem möchte ich meinem Vater und Ilka Schröder sehr für ihre Unterstützung danken.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Notationen fixiert und einige im weiteren Verlauf benötigte Voraussetzungen zusammengestellt. Obwohl viele der aufgeführten Definitionen und Resultate bereits bekannt sein dürften, empfiehlt sich ihre Lektüre, da einige Schreibweisen eingeführt werden, die nicht allgemein üblich sind. Dies gilt vor allem für Bezeichnungen im Zusammenhang mit Produkten und mehrstelligen Relationen.

1.1 Mengentheoretische Notationen

Sofern nichts anderes festgelegt wird, verwenden wir geläufige logische und mengentheoretische Notationen, darunter $\subseteq$ für die Mengeninklusion, $\mathcal{P}X$ für die Potenzmenge einer Menge X und $X \setminus A$ für das Komplement einer Menge A in X. Das Komplement von A wird auch mit $-A$ oder A^{c} bezeichnet, falls der Bezug auf eine Obermenge X gegeben ist. Wo es nötig ist, unterscheiden wir zwischen Mengen und Klassen.

1.1.1 Relationen und Abbildungen

Definition 1.1.1 (Relationen)**.** Seien X und Y Mengen. Eine (binäre oder zweistellige) *Relation zwischen X und Y* ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $X \times Y$. Im Falle $X = Y$ wird eine solche Relation auch *Relation auf X* genannt. Die Aussage, dass R eine Relation zwischen X und Y ist, wird abkürzend notiert als

$$R : X \rightharpoonup Y.$$

Diese Aussage ist auch gemeint, wenn wir im folgenden (nicht ganz korrekt) von der Relation $R : X \rightharpoonup Y$ sprechen, und analoges gilt später für Abbildungen. Anstelle von $(x, y) \in R$ schreiben wir meistens $x \; R \; y$ oder $R(x, y)$.

Für Relationen $R : X \rightharpoonup Y$ und $S : Y \rightharpoonup Z$ ist die *Komposition* von R und S definiert durch

$$S \circ R = \{\, (x, z) : \exists y(x \; R \; y \;\&\; y \; S \; z) \,\},$$

und es gilt $S \circ R : X \rightharpoonup Z$. Die Gleichheitsrelation (Identität) auf X wird mit id_X bezeichnet.

Für eine Relation R zwischen X und Y sei $R^{\mathrm{d}} = \{\, (y, x) : (x, y) \in R \,\}$ die zu R *duale* oder *konverse* Relation (manchmal auch mit R^{-1} bezeichnet) und $R^{\mathrm{c}} = (X \times Y) \setminus R$ die zu R *komplementäre* Relation. Es ist $(S \circ R)^{\mathrm{d}} = R^{\mathrm{d}} \circ S^{\mathrm{d}}$ und $(R^{\mathrm{d}})^{\mathrm{c}} = (R^{\mathrm{c}})^{\mathrm{d}}$.

Wir verwenden die folgenden nützlichen Abkürzungen:

Notation 1.1.2 (Relationen-Schreibweisen)**.** Es gelte $R : X \rightharpoonup Y$. Für $x \in X$, $y \in Y$ sei

$$xR := x^R := \{\, y : x \; R \; y \,\}, \qquad Ry := y_R := \{\, x : x \; R \; y \,\}.$$

Für $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sei

$$\begin{aligned} AR &:= \{\, y : (\exists x \in A)(x \mathrel{R} y) \,\} = \bigcup \{\, xR : x \in A \,\}, \\ RB &:= \{\, x : (\exists y \in B)(x \mathrel{R} y) \,\} = \bigcup \{\, Ry : y \in B \,\} \end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned} A^R &:= \{\, y : (\forall x \in A)(x \mathrel{R} y) \,\} = \bigcap \{\, xR : x \in A \,\}, \\ B_R &:= \{\, x : (\forall y \in B)(x \mathrel{R} y) \,\} = \bigcap \{\, Ry : y \in B \,\}. \end{aligned}$$

Mit diesen Schreibweisen ist $xR = \{x\}R = \{x\}^R = x^R$ und $Ry = R\{y\} = \{y\}_R = y_R$. Offensichtlich gilt $R^{\mathrm{d}}A = AR$ und $A_{R^{\mathrm{d}}} = A^R$.

Einige wichtige Eigenschaften von Relationen fasst die nächste Definition zusammen.

Definition 1.1.3 (Eigenschaften von Relationen)**.** Eine binäre Relation R auf X heißt

- *reflexiv*, falls $x \mathrel{R} x$ für alle $x \in X$ gilt;
- *transitiv*, falls aus $x \mathrel{R} y$ und $y \mathrel{R} z$ stets $x \mathrel{R} z$ folgt;
- *antisymmetrisch*, falls $x \mathrel{R} y$ und $y \mathrel{R} x$ stets $x = y$ implizieren.

Eine *Quasiordnung* auf X ist eine reflexive und transitive Relation auf X, und eine antisymmetrische Quasiordnung ist eine *Ordnung*. Eine Relation S zwischen X und Y heißt

- *linkstotal*, falls es zu jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ gibt mit $x \mathrel{S} y$.
- *rechtseindeutig*, falls aus $x \mathrel{S} y$ und $x \mathrel{S} z$ stets $y = z$ folgt.

Dual werden die Eigenschaften *rechtstotal* und *linkseindeutig* definiert.

Die obigen Eigenschaften lassen sich alle elementfrei beschreiben, die ersten beiden folgendermaßen:

Lemma 1.1.4. *Für jede Relation R auf X gilt:*

$$\begin{aligned} R \text{ reflexiv} &\iff \mathrm{id}_X \subseteq R, \\ R \text{ transitiv} &\iff R \circ R \subseteq R. \end{aligned}$$

Jede Quasiordnung R ist somit insbesondere idempotent, d. h. $R \circ R = R$. □

Für die vorliegenden Zwecke ist es günstig, Funktionen als spezielle Relationen aufzufassen. Wir unterscheiden also nicht zwischen einer Funktion und ihrem Graphen.

Definition 1.1.5 (Abbildungen und Familien)**.** Seien X und Y Mengen. Eine Relation f zwischen X und Y ist eine *Funktion* oder *Abbildung von X in Y*, was wie üblich auch in der Form $f\colon X \to Y$ notiert wird, falls sie linkstotal und rechtseindeutig ist. Statt $x \mathrel{f} y$ wird in diesem Fall $f(x) = y$ oder $f\colon x \mapsto y$ geschrieben.

Es gilt $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, und die Komposition $g \circ f$ von $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ ist gegeben durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Eine injektive Funktion $f\colon X \to Y$ ist linkseindeutig, eine surjektive rechtstotal, und ist f eine bijektive Abbildung, d. h. injektiv und surjektiv, so ist $f^{-1} = f^{\mathrm{d}}$ ihre Inverse oder Umkehrabbildung.

Für $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ bezeichnet $f[A] = Af = \{ f(x) : x \in A \}$ das *Bild von A unter f* und $f^{-1}[B] = fB = \{ x \in A : f(x) \in B \}$ das *Urbild von B unter f*. Mit Hilfe von Bild bzw. Urbild lässt sich jede Abbildung f von X in Y zu einer Abbildung zwischen Potenzmengen liften: Die Funktionen $f_\rightarrow \colon \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$ und $f_\leftarrow \colon \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X$ seien festgelegt durch

$$f_\rightarrow(A) = f[A] \quad \text{und} \quad f_\leftarrow(B) = f^{-1}[B].$$

Wird eine Menge I als Indexmenge aufgefasst, so nennt man eine Abbildung $F \colon I \to X$ auch eine (durch I indizierte) *Familie* und schreibt sie in der Form $F = (\, F_i : i \in I \,)$ oder $(F_i)_{i \in I}$ mit der Notation $F_i = F(i)$.

Es bezeichne Y^X die Menge aller Abbildungen von X in Y.[1]

Die im folgenden eingeführten Schreibweisen $f^\bullet$ und f° werden später häufig verwendet.

Definition 1.1.6 (Restriktion und Co-Restriktion von Funktionen)**.** Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung, und seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Die *Restriktion von f auf A* ist die Funktion $f \restriction A := f \cap (A \times Y)$ von A in Y. Ist $f[X] \subseteq B$, so ist f auch eine Abbildung von X in B und wird als solche die *Co-Restriktion von f auf B* genannt.

Mit $f^\bullet$ bezeichnen wir die Co-Restriktion von f auf den Bildbereich $f[X]$, und es sei f° die Inklusionsabbildung von $f[X]$ in Y, also $f^\circ = \mathrm{id}_Y \restriction f[X]$. Diese Schreibweisen liefern die bekannte Faktorisierung einer Abbildung über ihr Bild: Jedes $f \colon X \to Y$ lässt sich trivialerweise zerlegen in die surjektive Funktion $f^\bullet \colon X \to f[X]$ und die injektive $f^\circ \colon f[X] \to Y$ mit

$$f^\circ \circ f^\bullet = f.$$

1.1.2 Schreibweisen für Produkte und Familien

Im folgenden stehe n immer für eine natürliche Zahl aus $\{0, 1, 2, \ldots\}$, und es sei

$$\underline{n} := \{1, \ldots, n\}.$$

Insbesondere ist dann $\underline{0}$ die leere Menge $\emptyset$, welche wir auch mit 0 bezeichnen.

Definition 1.1.7 (Allgemeine kartesische Produkte)**.** Sei $A = (\, A_i : i \in I \,)$ eine Familie von Mengen. Das (allgemeine) *kartesische Produkt* der Mengen A_i ist

$$\textstyle\prod A = \prod_{i \in I} A_i = \{\, a \colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i : a(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \,\},$$

und mit der Schreibweise für Familien ist $a_i = a(i)$ für alle $a \in \prod A$ und $i \in I$. Gilt $A_i = X$ für jedes $i \in I$, so ist $\prod A = X^I$.

Für $i \in I \neq \emptyset$ bezeichne $\pi_i \colon \prod A \to A_i$ die durch $\pi_i(a) = a_i$ gegebene *i-te Projektionsabbildung* zu $\prod A$.

Im Falle endlicher Indexmengen $I = \underline{n}$ identifizieren wir das allgemeine kartesische Produkt $\prod A = \prod_{i \in I} A_i$ mit der Menge

$$\textstyle\prod_{i=1}^n A_i = \prod(A_1, \ldots, A_n) = A_1 \times \ldots \times A_n = \{\, (a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ \ldots, \ a_n \in A_n \,\},$$

1 Eine Verwechslung mit der Notation A^R für Relationen R ist hier nicht zu befürchten.

unterscheiden also Tupel nicht von endlichen Folgen. Mit dieser Konvention ist das binäre kartesische Produkt $\times$ insbesondere assoziativ, und für jede Menge X ist $X^{\underline{n}} = X^n = X \times \ \ldots \times X$. Für $n = 0$ erhält man das *leere Produkt* $1 := \prod \emptyset = \{0\}$. Im folgenden werden auch $1 \times X$, $X \times 1$ und X^1 mit X gleichgesetzt. Ein n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist im Fall $n = 0$ das leere Tupel (die leere Menge), und im Fall $n = 1$ wird es mit seiner einzigen Komponente identifiziert.

Definition 1.1.8 (Produkte von Abbildungen)**.** Für eine durch I induzierte Familie f von Abbildungen $f_i \colon A_i \to B_i$ sei das Produkt $\prod f = \prod_{i \in I} f_i \colon \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$ der Abbildungen f_i definiert durch $(\prod f)(x) = (\, f_i(x_i) : i \in I\,)$.

Mit der Projektionsabbildung $\pi_j \colon \prod_{i \in I} A_i \to A_j$ gilt dann $\pi_j \circ \prod f = f_j \circ \pi_j$. Außerdem ist $(\prod f)[\prod_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} f_i[A_i]$ und $\prod g \circ \prod f = \prod_{i \in I}(g_i \circ f_i)$ für jede weitere Familie $(\, g_i : i \in I\,)$ von Abbildungen $g_i \colon B_i \to C_i$.

Im Fall $I = \underline{n}$ schreiben wir das Produkt $\prod_{i \in I} f_i$ auch als $\prod_{i=1}^n f_i = \prod(f_1, \ldots, f_n) = f_1 \times \ \ldots \times f_n$. Gilt speziell $f_i = h$ für alle $i \in \underline{n}$, so ist $\prod_{i=1}^n f_i$ die Potenz[2]

$$h^n = h \times \ldots \times h.$$

Für $n = 0$ bezeichnen wir mit 1 auch die einzige Abbildung $\mathrm{id}_1 = \{(0, 0)\}$ von 1 in sich.

Es ist vorteilhaft, einige der eingeführten Bezeichnungen auf Familien auszudehnen:

Notation 1.1.9 (Familien-Schreibweisen)**.** Für eine Familie $A = (\, A_i : i \in I\,)$ von Mengen sei

$$\mathrm{id}_A = (\, \mathrm{id}_{A_i} : i \in I\,).$$

Die Identität $\mathrm{id}_{\prod A} \colon \prod A \to \prod A$ lässt sich damit schreiben als $\mathrm{id}_{\prod A} = \prod \mathrm{id}_A = \prod_{i \in I} \mathrm{id}_{A_i}$.

Für eine Familie $f = (\, f_i : i \in I\,)$ von Abbildungen setzen wir

$$f^\bullet = (\, f_i^\bullet : i \in I\,) \quad \text{und} \quad f^\circ = (\, f_i^\circ : i \in I\,).$$

Insbesondere ist dann $\prod f^\bullet = \prod_{i \in I} f_i^\bullet = (\prod f)^\bullet$.

Später wird es häufiger nötig sein, eine Komponente einer Familie bzw. einen Faktor eines Produkts abzuändern. Daher lohnt es sich, hierfür eine handliche Notation einzuführen.

Notation 1.1.10 (Modifikation der i-ten Koordinate)**.** Sei X eine Menge, $A = (\, A_j : j \in I\,)$ eine Familie von Mengen und $i \in I$. Für $a \in \prod A$ und $x \in X$ sei die in der Koordinate i modifizierte Familie $a[i \mapsto x]$ definiert durch

$$a[i \mapsto x]_j = \begin{cases} x, & \text{falls } j = i, \\ a_j, & \text{falls } j \neq i. \end{cases}$$

Hierdurch ist auch $A[i \mapsto X]$ erklärt, und es ist

$$\prod A[i \mapsto X] = \{\, a[i \mapsto x] : a \in \prod A,\ x \in X\,\}.$$

2 Demnach steht die Potenz f^n einer Abbildung $f \colon X \to Y$ im folgenden immer für $f \times \ldots \times f$ und *nicht* für $f \circ \ldots \circ f$ (letzteres wäre auch nur für Selbstabbildungen definiert).

Im folgenden benötigen wir diese Schreibweise in der Regel nur für $I = \underline{n}$; es ist dann $a[i \mapsto x] = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ und

$$\prod A[i \mapsto X] = A_1 \times \ldots \times A_{i-1} \times X \times A_{i+1} \times \ldots \times A_n.$$

Sofern die Stelle i aus dem Zusammenhang hervorgeht, schreiben wir dafür meistens kürzer $(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$ bzw. $A_1 \times \ \ldots \times X \times \ \ldots \times A_n$. Wir ergänzen noch den Fall $i = 0 \notin I$ mit der Festlegung $a[0 \mapsto x] := a$.

Um die ersten n Komponenten eines $(n{+}1)$-Tupels deutlich von der letzten zu unterscheiden, verwenden wir das Semikolon:

Konvention 1.1.11 (Tupel-Schreibweise)**.** Ein $(n+1)$-Tupel $(x_1, \dots, x_n, y)$ wird im folgenden meistens in der Form

$$(x_1, \dots, x_n; y) \quad \text{oder kurz} \quad (x; y)$$

geschrieben. Die Schreibweise $(x; y)$ soll außerdem immer implizieren, dass x ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ und y ein Element ist (wobei n aus dem Zusammenhang hervorgeht)! Im Fall $n = 1$ ist $(x; y)$ das geordnete Paar (x, y), und für $n = 0$ wird $(x; y)$ mit y identifiziert.

1.1.3 Mehrstellige Relationen und Abbildungen

Mehrstellige Abbildungen sind gewöhnliche Abbildungen der Form $\prod X \to Y$, deren Definitionsbereich ein (endliches) Produkt ist. Eine Zerlegung dieses Produktes in Faktoren wird in der Literatur meistens nur implizit als gegeben vorausgesetzt, was zu Missverständnissen führen kann. Darüber hinaus wird es im weiteren Verlauf von Bedeutung sein, ob eine solche Abbildung als gewöhnliche (einstellige) oder mehrstellige aufgefasst wird. Aus diesem Grund führen wir für mehrstellige Abbildungen spezielle Bezeichnungen ein. Dasselbe gilt für mehrstellige Relationen, mit denen wir beginnen.

Definition 1.1.12 (Mehrstellige Relationen)**.** Sei $(X; Y) = (X_1, \dots, X_n; Y)$ eine Familie von Mengen. Eine $(n+1)$-stellige *Relation zwischen* $X_1, \ \dots, \ X_n$ *und* Y, auch *Relation über* $(X; Y)$ genannt, ist eine Teilmenge von $X_1 \times \ldots \times X_n \times Y$, d. h. eine binäre Relation zwischen $\prod X$ und Y. Im Fall $X_1 = \ldots = X_n = Y$ wird eine solche Relation auch $(n+1)$*-stellige Relation auf* Y genannt.

Eine Relation R zwischen $X_1, \dots, X_n$ und Y ist im Fall $n = 0$ einfach eine Teilmenge von Y und im Fall $n = 1$ eine binäre Relation zwischen X_1 und Y. Anstelle von $(x_1, \dots, x_n, y) \in R$ schreiben wir meistens $R(x_1, \dots, x_n; y)$ oder $R(x; y)$.

Für $i \in \underline{n}$ entstehe die i*-te konverse* (oder i*-konverse*) Relation R^{-i} über $(X[i \mapsto Y]; X_i)$ aus R durch Vertauschen der i-ten und $(n+1)$-ten Koordinate:

$$(x; y) \in R^{-i} \quad \Longleftrightarrow \quad (x[i \mapsto y]; x_i) \in R.$$

Offensichtlich ist $(R^{-i})^{-i} = R$, und im Fall $n = 1$ ist R^{-1} gerade R^{d}. Die komplementäre Relation zu R ist $R^{\mathrm{c}} = (\prod X \times Y) \setminus R$. Es gilt $(R^{-i})^{\mathrm{c}} = (R^{\mathrm{c}})^{-i}$.

Die Schreibweise R^{-i} für die i-te konverse Relation geht auf Dunn [20] zurück. Eine weitere nützliche Notation für mehrstellige Relationen ist die folgende:

Notation 1.1.13 (Relationen-Schreibweise)**.** Sei R eine $(n+1)$-stellige Relation über $(X;Y)$. Für alle $(x;x_{n+1}) \in \prod X \times Y$ und alle $i \in \underline{n+1}$ definieren wir

$$R(x_1, \dots, x_{i-1}, \_, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) := \{\, z : (x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in R \,\}.$$

Für Mengen X, Y und eine zweistellige Relation $R : X \rightharpoondown Y$ ist damit $R(x, \_) = xR = x^R$ und $R(\_, y) = Ry = y_R$ für alle $x \in X$, $y \in Y$.

Definition 1.1.14 (Mehrstellige Abbildungen)**.** Sei $(X;Y) = (X_1, \dots, X_n; Y)$ eine Familie von Mengen. Eine n-stellige *Funktion* oder *Abbildung f von X_1, …, X_n in Y* (oder kurz: *von X in Y*), auch geschrieben als $f\colon (X_1, \dots, X_n) \to Y$, ist eine gewöhnliche Abbildung von $\prod X$ in Y. Jede Abbildung von X_1, …, X_n in Y ist also insbesondere eine $(n+1)$-stellige Relation zwischen X_1, …, X_n und Y. Durch die verwendete Notation

$$f\colon X \to Y \quad \text{bzw.} \quad f\colon \prod X \to Y$$

wird im folgenden gekennzeichnet, ob f als mehrstellige oder einstellige Abbildung aufgefasst wird. Ist die Zerlegung des Produkts $\prod X$ offensichtlich, so schließen wir uns manchmal auch der verbreiteten Konvention an, von der mehrstelligen Abbildung $f\colon \prod X \to Y$ zu sprechen, obwohl eigentlich $f\colon X \to Y$ gemeint ist. Für $f((x_1, \dots, x_n))$ wird meistens nur $f(x_1, \dots, x_n)$ geschrieben.

Eine nullstellige Abbildung ist nach Definition eine Funktion $f\colon 1 \to Y$, die wir mit ihrem einzigen Bildelement $f(0) \in Y$ identifizieren. Die nullstelligen Abbildungen von 1 in Y entsprechen demnach genau den Elementen von Y. Sofern die nullstellige Abbildung $f\colon 1 \to Y$ als Relation aufgefasst wird, identifizieren wir sie mit der einelementigen Teilmenge $\{f(0)\} \subseteq Y$.

Mit Hilfe kartesischer Produkte lässt sich die Komposition mehrstelliger Abbildungen auf die gewöhnliche Komposition zurückführen: Sei $f = (f_1, \dots, f_n)$ eine Familie m_i-stelliger Abbildungen $f_i\colon (X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i}) \to Y_i$ und g eine Abbildung von Y_1, …, Y_n in Z. Dann bezeichne $g \circ f = g \circ (f_1, \dots, f_n)$ die Abbildung $g \circ \prod f = g \circ (f_1 \times \ldots \times f_n)$ (wobei für letztere alle Abbildungen als gewöhnliche aufgefasst werden). Damit erhält man eine Abbildung von $X_{1,1}$, …, X_{1,m_1}, $X_{2,1}$, …, X_{2,m_2}, …, $X_{n,1}$, …, X_{n,m_n} in Z mit

$$(g \circ (f_1, \dots, f_n))(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$$

für alle m_i-Tupel $x_i \in X_{i,1} \times \ldots \times X_{i,m_i}$ $(i \in \underline{n})$.

Ist $f\colon (X_1, \dots, X_n) \to Y$ eine n-stellige Abbildung und $A = (A_1, \dots, A_n)$ eine Mengen-Familie mit $A_i \subseteq X_i$ für alle $i \in \underline{n}$, so sei das *Bild* $f[A] = f[A_1, \dots, A_n]$ von A_1, …, A_n unter f dasselbe wie das Bild von $\prod A$ unter der gewöhnlichen Abbildung $f\colon \prod X \to Y$, also

$$f[A_1, \dots, A_n] = \{\, f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \ \dots, \ x_n \in A_n \,\}.$$

Analog wird die *Restriktion* $f \restriction A$ von f auf A_1, …, A_n zurückgeführt auf die Restriktion der Abbildung $f\colon \prod X \to Y$ auf $\prod A$.

Je nach Bedarf werden wir später flexibel zwischen den Sprech- und Schreibweisen für ein- und mehrstellige Abbildungen wechseln. Aus dem Zusammenhang wird aber immer deutlich werden, auf welche Weise eine Abbildung gerade aufgefasst wird.

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Betrachtung einer weiteren vorteilhaften Notation für mehrstellige Relationen und Abbildungen, die das „Festhalten“ aller Variablen bis auf eine beschreibt.

Notation 1.1.15 (Reduktion auf die i-te Koordinate)**.** Sei R eine Relation zwischen den Mengen $X_1, \ldots, X_n$ und Y, und sei $i \in \underline{n}$. Für jedes $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \prod_{j=1}^n X_j$ sei die binäre Relation R_i^a zwischen X_i und Y definiert durch

$$R_i^a(x, y) \quad :\Longleftrightarrow \quad R(a[i \mapsto x]; y) \quad \Longleftrightarrow \quad R(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n; y)$$

für alle $x \in X_i$, $y \in Y$. Es gilt $R_i^a = R_i^{a[i \mapsto x]}$ für alle $x \in A_i$, d. h. die durch Reduktion entstandene Relation R_i^a hängt nicht von a_i ab. Offensichtlich ist $R_i^a(a_i, y)$ äquivalent zu $R(a; y)$.

Ist f eine n-stellige Abbildung von $X = (X_1, \ldots, X_n)$ in Y, so ist speziell

$$f_i^a(x) = f(a[i \mapsto x]) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

für alle $a \in \prod X$ und alle $x \in X_i$. Wir schreiben die Abbildung f_i^a auch in der Form $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Für zweistellige Funktionen o in Infixnotation ist dann

$$o_1^{(a_1, a_2)} = (\,\cdot\; o\, a_2) \quad \text{und} \quad o_2^{(a_1, a_2)} = (a_1\; o\; \cdot\,).$$

Es ist $f_i^a(a_i) = f(a)$. Außerdem gilt $(\mathrm{id}_X)_i^a(x) = a[i \mapsto x]$ und somit $f_i^a = f \circ (\mathrm{id}_X)_i^a$.

Mit der soeben eingeführten Notation präzisieren wir die anschaulich einleuchtende Formulierung, dass eine mehrstellige Abbildung in der i-ten Variablen eine gewisse Eigenschaft besitzt.

Definition 1.1.16 (Eigenschaften in der i-ten Koordinate)**.** Es sei f eine n-stellige Abbildung von $X = (X_1, \ldots, X_n)$ in Y, $i \in \underline{n}$ und $\mathcal{E}$ eine beliebige Eigenschaft. Hat f_i^a für alle $a \in \prod X$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so sagen wir, die Abbildung f habe *in der i-ten Variablen* (oder *in der i-ten Koordinate*) die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Lemma 1.1.17. *Sei R eine Relation zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und Y. Für jedes $i \in \underline{n}$ und alle $a \in \prod_{j=1}^n X_j$ gilt*

$$(R^{-i})_i^a = (R_i^a)^{\mathrm{d}}.$$

Beweis. Nach Definition von R^{-i} ist

$$(R^{-i})_i^a(y, x) \Leftrightarrow R^{-i}(a[i \mapsto y]; x) \Leftrightarrow R(a[i \mapsto x]; y) \Leftrightarrow R_i^a(x, y) \Leftrightarrow (R_i^a)^{\mathrm{d}}(y, x)$$

für alle $(x, y) \in X_i \times Y$. □

Lemma 1.1.18. *Sei f eine Abbildung von $X_1, \ldots, X_n$ in Y, und sei $i \in \underline{n}$.*

(a) Für alle Abbildungen $g\colon Y \to Z$ und alle $a \in \prod_{j=1}^n X_j$ ist

$$(g \circ f)_i^a = g \circ f_i^a.$$

(b) Für alle Familien $h = (h_1, \ldots, h_n)$ von Abbildungen $h_j\colon W_j \to X_j$ ($j \in \underline{n}$) und alle $b \in \prod_{j=1}^n W_j$ gilt

$$(f \circ h)_i^b = f_i^{\prod h(b)} \circ h_i.$$

Beweis. Zu (a). $(g \circ f)_i^a(x) = (g \circ f)(a[i \mapsto x]) = g(f(a[i \mapsto x])) = (g \circ f_i^a)(x)$. Zu (b). $(f \circ h)_i^b(w) = f(\prod h(b[i \mapsto w])) = f(h_1(b_1), \ldots, h_i(w), \ldots, h_n(b_n)) = (f_i^{\prod h(b)} \circ h_i)(w)$. □

1.2 Ordnungstheoretische Voraussetzungen

In diesem Abschnitt erläutern wir zunächst einige grundlegende Notationen im Zusammenhang mit geordneten Mengen und stellen anschließend die für unsere Zwecke wichtigsten Resultate über Hüllenoperationen und ordnungstheoretische Adjunktionen zusammen. Eine vollständige Darstellung aller ordnungstheoretischen Voraussetzungen kann an dieser Stelle natürlich nicht gegeben werden, und wir verzichten bis auf wenige Ausnahmen auf Beweise. Für ausführliche Einführungen in die Ordnungstheorie sei auf [17] und [26] verwiesen.

1.2.1 Geordnete Mengen und vollständige Verbände

Wir beginnen mit den elementaren ordnungstheoretischen Definitionen.

Definition 1.2.1 (Quasigeordnete und geordnete Mengen)**.** Ein Paar $P = (X, R)$ heißt *quasigeordnete* (bzw. *geordnete*) *Menge*, falls X eine Menge und R eine Quasiordnung (bzw. Ordnung) auf X ist. Wir schreiben $|P|$ für die zugrundeliegende Menge X und $\leq_P$ für die Ordnungsrelation R von P. Sofern der Bezug offensichtlich ist, schreiben wir auch $\leq$ anstelle von $\leq_P$.

Sei $P = (|P|, \leq_P)$ eine quasigeordnete Menge. Dann ist die zu $\leq_P$ duale Relation $\geq_P$ wieder eine Quasiordnung, und es sei $P^{\mathrm{op}} := (|P|, \geq_P)$ die zu P *duale* quasigeordnete Menge.

Für eine Teilmenge A von $|P|$ ist $A^{\leq_P}$ (bzw. $A_{\leq_P}$) die Menge aller *oberen* (bzw. *unteren*) *Schranken* von A in P, und ein *größtes* Element (*Maximum*) von A ist eine obere Schranke von A, die in A liegt. Dual wird ein *kleinstes* Element (*Minimum*) definiert. Falls P eine geordnete Menge ist, sind existierende größte bzw. kleinste Elemente von A eindeutig bestimmt und werden mit $\max_P A$ bzw. $\min_P A$ bezeichnet.

Ein *Supremum* von A in P ist eine kleinste obere Schranke, ein *Infimum* eine größte untere Schranke von A in P. Ist P eine geordnete Menge, so sind existierende Suprema bzw. Infima von A eindeutig bestimmt und werden mit $\bigvee_P A$ oder $\bigvee A$ bzw. $\bigwedge_P A$ oder $\bigwedge A$ bezeichnet.

Manchmal benötigen wir die folgenden geordneten Mengen: $\mathbf{0} := (0, \leq) = (\emptyset, \emptyset)$, $\mathbf{1} := (1, \leq) = (\{0\}, =)$ und $\mathbf{2} := (\{0, 1\}, \leq)$ mit $0 < 1$.

Die Systeme der Abschnitte und Schnitte einer quasigeordneten Menge und die zugehörigen Operatoren spielen im weiteren Verlauf eine wichtige Rolle.

Definition 1.2.2 (Abschnitte und Schnitte)**.** Sei P eine quasigeordnete Menge, $A \subseteq |P|$ und $x \in |P|$. Die Menge $\downarrow_P A := \leq_P A$ ist der *von A erzeugte* (*untere*) *Abschnitt*, und $\downarrow_P x := \leq_P x = \downarrow_P \{x\}$ ist das von x erzeugte *Hauptideal* in P. Dual sind der *von A erzeugte obere Abschnitt* $\uparrow_P A = A \leq_P$ und der von x erzeugte *Hauptfilter* $\uparrow_P x = x \leq_P$ in P festgelegt. Offensichtlich gilt $x \leq_P y \Leftrightarrow \downarrow_P x \subseteq \downarrow_P y$. Der *von A erzeugte* (*untere*) *Schnitt* ist definiert durch $\Delta_P A := {A^{\leq_P}}_{\leq_P}$.

Der *Abschnittsoperator* von P ist die Abbildung $\downarrow_P : \mathcal{P}|P| \to \mathcal{P}|P|$, $A \mapsto \downarrow_P A$, und der duale Abschnittsoperator $\uparrow_P : \mathcal{P}|P| \to \mathcal{P}|P|$ ist gegeben durch $\uparrow_P = \downarrow_{P^{\mathrm{op}}}$. Wie üblich schreiben wir auch $\downarrow$ für $\downarrow_P$ und ebenso $\uparrow$ für $\uparrow_P$. Es bezeichne

$$\mathcal{A}P := \{\, \downarrow_P A : A \subseteq |P| \,\} = \{\, B \subseteq |P| : \downarrow_P B = B \,\}$$

die Menge der (*unteren*) *Abschnitte* und damit $\mathcal{A}P^{\mathrm{op}}$ die Menge der *oberen Abschnitte* von P.

Der *Schnittoperator* von P ist die Abbildung $\Delta_P : \mathcal{P}|P| \to \mathcal{P}|P|$, $A \mapsto \Delta_P A$, und es bezeichne

$$\mathcal{N}P := \{\, \Delta_P A : A \subseteq |P| \,\} = \{\, B_{\leq_P} : B \subseteq |P| \,\} = \{\, A \subseteq |P| : \Delta_P A = A \,\}$$

die Menge aller (*unteren*) *Schnitte* von P.

Für jedes $x \in |P|$ ist $\Delta_P(\{x\}) = {\downarrow_P} x$, und für alle $A, B \subseteq |P|$ gilt $({\downarrow_P} A)^{\leq_P} = A^{\leq_P}$ sowie ${\downarrow_P}(B_{\leq_P}) = B_{\leq_P}$. Jeder Schnitt ist also insbesondere ein Abschnitt, und es gilt $\Delta_P \circ {\downarrow_P} = \Delta_P = {\downarrow_P} \circ \Delta_P$. Der *restringierte Schnittoperator* $\Delta_P^{\downarrow} \colon \mathcal{A}P \to \mathcal{A}P$, $D \mapsto \Delta_P D$, entsteht durch Restriktion und Co-Restriktion des Schnittoperators Δ_P auf $\mathcal{A}P$. Damit ist $\Delta_P^{\downarrow} = {\downarrow_P^{\bullet}} \circ \Delta_P \circ {\downarrow_P^{\circ}}$.

Konvention 1.2.3 (Schreibweisen für quasigeordnete Mengen)**.** Bei allen Schreibweisen, die sich auf die zugrundeliegende Menge $|P|$ einer quasigeordneten Menge P beziehen, verwenden wir meistens nur die Bezeichnung P statt $|P|$. So stehen etwa $x \in P$, $A \subseteq P$, $\mathcal{P}P$ und id_P für $x \in |P|$, $A \subseteq |P|$, $\mathcal{P}|P|$ bzw. $\mathrm{id}_{|P|}$. Auch für Funktionen f zwischen quasigeordneten Mengen P und Q schreiben wir beispielsweise $f \colon P \to Q$ statt $f \colon |P| \to |Q|$ und $f[P]$ für $f[|P|]$.

Dieselben Konventionen gelten im folgenden auch für alle weiteren Strukturen X, deren zugrundeliegende Menge oder Klasse mit $|X|$ bezeichnet wird, insbesondere Hüllenstrukturen (Kapitel 4) und Hüllenräume (Kapitel 6).

Definition 1.2.4 (Isotone Abbildungen)**.** Seien P, Q quasigeordnete Mengen. Eine Abbildung $f \colon P \to Q$ heißt

- *isoton* (oder *ordnungserhaltend*, *monoton*), falls gilt: $x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)$;
- *antiton* (oder *ordnungsumkehrend*), falls gilt: $x \leq_P y \Rightarrow f(y) \leq_Q f(x)$;
- (*Ordnungs-*)*Isomorphismus*, falls f eine bijektive isotone Abbildung ist, deren Inverse f^{-1} auch isoton ist.

$P \cong Q$ bedeute wie üblich, dass P und Q isomorph sind, d. h. dass ein Ordnungsisomorphismus zwischen P und Q existiert. Einen Isomorphismus von P^{op} in Q nennen wir auch *dualen Ordnungsisomorphismus* zwischen P und Q.

Isotone Abbildungen lassen sich durch eine Stetigkeitsbedingung charakterisieren:

Lemma 1.2.5. *Eine Abbildung $f \colon P \to Q$ zwischen quasigeordneten Mengen P und Q ist genau dann isoton, wenn $f_{\leftarrow}$ untere Abschnitte bewahrt, d. h. falls Urbilder unterer Abschnitte in Q unter f wieder untere Abschnitte in P sind.* □

Als nächstes werden vollständige Verbände betrachtet.

Definition 1.2.6 (Vollständige Verbände)**.** Eine geordnete Menge L ist ein *vollständiger Verband*, falls jede Teilmenge von L ein Supremum (und damit auch jede Teilmenge ein Infimum) in L besitzt.

Für jeden vollständigen Verband L ist auch L^{op} ein vollständiger Verband mit $\bigvee_{L^{\mathrm{op}}} A = \bigwedge_L A$, außerdem besitzt L sowohl ein kleinstes als auch ein größtes Element, nämlich $\bot := \bot_L := \bigvee_L \emptyset$ bzw. $\top := \top_L := \bigwedge_L \emptyset$. Wir schreiben $x \vee_L y$ oder $x \vee y$ für das binäre Supremum $\bigvee_L \{x, y\}$ und ebenso $x \wedge_L y$ oder $x \wedge y$ für das binäre Infimum $\bigwedge_L \{x, y\}$. Es gilt $x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow x \vee y = y$.

Eine Teilmenge B eines vollständigen Verbandes L ist $\bigvee$*-abgeschlossen*, falls für alle $A \subseteq B$ das Supremum $\bigvee_L A$ in B liegt. Dual werden $\bigwedge$*-abgeschlossene* Teilmengen definiert.

Die geordneten Mengen **1** und **2** sind vollständige Verbände. Die Schnitte in einem vollständigen Verband L sind genau die Hauptideale, denn es ist $\Delta_L A = {\downarrow_L} \bigvee_L A$ für alle $A \subseteq L$.

Definition 1.2.7 ($\bigvee$-erhaltende Abbildungen)**.** Seien L, M vollständige Verbände. Eine Abbildung $f\colon L \to M$ heißt

- $\bigvee$-*erhaltend* ($\bigvee$-*Homomorphismus*), falls $f(\bigvee_L A) = \bigvee_M f[A]$ für alle $A \subseteq L$ gilt;
- $\bigwedge$-*erhaltend* ($\bigwedge$-*Homomorphismus*), falls $f(\bigwedge_L A) = \bigwedge_M f[A]$ für alle $A \subseteq L$ gilt;
- *vollständiger Homomorphismus*, falls f $\bigvee$- und $\bigwedge$-erhaltend ist.

Jeder Ordnungsisomorphismus zwischen vollständigen Verbänden ist auch ein vollständiger Homomorphismus. Zwischen Ordnungs- und Verbandsisomorphismen muss also nicht unterschieden werden.

Definition 1.2.8 (Potenzmengen-, Schnitt- und Abschnittsverband)**.** Sei X eine Menge. Der *Potenzmengenverband* von X ist

$$\mathfrak{P}X := (\mathcal{P}X, \subseteq).$$

Dieser ist ein vollständiger Verband mit $\bigvee \mathcal{X} = \bigcup \mathcal{X}$ und $\bigwedge \mathcal{X} = \bigcap \mathcal{X}$ für $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}X$.

Sei P eine quasigeordnete Menge. Es bezeichne

$$\mathfrak{A}P := (\mathcal{A}P, \subseteq)$$

den *Abschnittsverband* von P. Auch dieser ist ein vollständiger Mengenverband, da $\mathcal{A}P$ unter beliebigen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. $\mathfrak{A}P$ heißt auch *Alexandroff-Vervollständigung* und ist die größte Standardvervollständigung von P (siehe Definition 6.1.21).

Der *Schnittverband* von P sei

$$\mathfrak{N}P := (\mathcal{N}P, \subseteq).$$

Er ist die kleinste Standardvervollständigung von P und wird auch *Dedekind-MacNeille-Vervollständigung* oder *Schnittvervollständigung* genannt.

Die Komplement-Operation $A \mapsto -A$ auf einem Potenzmengenverband $\mathfrak{P}X$ ist eine antitone Involution (also ein selbstinverser dualer Isomorphismus) und wird auch mit $-_X$ bezeichnet. Dazu passend notieren wir die Identität $\mathrm{id}_{\mathcal{P}X}$ auf $\mathfrak{P}X$ später gelegentlich als $+_X$ oder einfach $+$, d. h. es ist $+A = A$ für alle $A \subseteq X$.

Lemma 1.2.9. *Sei P eine quasigeordnete Menge. Das Komplement eines unteren Abschnitts von P ist ein oberer Abschnitt von P. Folglich ist die Komplement-Abbildung $D \mapsto -D$ von $\mathfrak{A}P$ in $\mathfrak{A}(P^{\mathrm{op}})$ ein selbstinverser dualer Isomorphismus, und es gilt $(\mathfrak{A}P)^{\mathrm{op}} \cong \mathfrak{A}(P^{\mathrm{op}})$.* □

Definition 1.2.10 (Vollständige Verbände von Relationen)**.** Ist $(X_1, \ldots, X_n; Y)$ eine Familie von Mengen, so bezeichne

$$\mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; Y) := \mathfrak{P}(X_1 \times \ldots \times X_n \times Y)$$

den vollständigen Verband aller Relationen zwischen X_1, …, X_n und Y. Für eine Familie $(P_1, \ldots, P_n; Q)$ quasigeordneter Mengen schreiben wir nach Konvention 1.2.3 meistens $\mathsf{Rel}(P_1, \ldots, P_n; Q)$ anstelle von $\mathsf{Rel}(|P_1|, \ldots, |P_n|; |Q|)$.

Analog zu den Bezeichnungen für Vektorräume unterscheiden wir auch im Falle vollständiger Verbände zwischen Erzeugendensystemen und Basen, verwenden den Begriff der Basis also im algebraischen und nicht im topologischen Sinne. Die Definitionen können bereits für beliebige quasigeordnete Mengen gegeben werden.

Definition 1.2.11 ($\bigvee$-Erzeuger und $\bigvee$-Basen)**.** Sei P eine quasigeordnete Menge. Eine Menge $J \subseteq P$ heißt $\bigvee$-*dicht* in P (auch $\bigvee$-*erzeugende Teilmenge* oder $\bigvee$-*Erzeuger* von P), falls für alle $x, y \in P$ gilt:

$$(\forall u \in J)(u \leq x \Rightarrow u \leq y) \quad \Longrightarrow \quad x \leq y.$$

Dual werden $\bigwedge$-*dichte Teilmengen* in P (oder $\bigwedge$-*Erzeuger* von P) definiert.

Ein bezüglich der Mengeninklusion *minimaler* $\bigvee$-Erzeuger ($\bigwedge$-Erzeuger) wird $\bigvee$-*Basis* (bzw. $\bigwedge$-Basis) von P genannt. Unter einer *Basis* von P verstehen wir im folgenden eine $\bigvee$-Basis.

Eine Teilmenge J eines vollständigen Verbandes L ist nun wie erwartet $\bigvee$-dicht, falls jedes Element von L als Supremum einer Teilmenge von J dargestellt werden kann.

Proposition 1.2.12. *Sei L ein vollständiger Verband und $J \subseteq L$. Es sind äquivalent:*

(1) J ist ein $\bigvee$-Erzeuger von L.

(2) Zu jedem $x \in L$ gibt es ein $A \subseteq J$ mit $x = \bigvee A$.

(3) Für alle $A \subseteq L$ gilt $\bigvee A = \bigvee((\downarrow A) \cap J)$.

(4) Für jedes $x \in L$ gilt $x = \bigvee(\downarrow x \cap J)$. □

Definition 1.2.13 (Basierte Verbände)**.** Besitzt ein vollständiger Verband eine $\bigvee$-Basis, so wird er $\bigvee$-*basiert* oder einfach *basiert* genannt (und dual erhält man $\bigwedge$-*basierte* Verbände).

Definition 1.2.14 ($\bigvee$-irreduzible Elemente)**.** Sei L ein vollständiger Verband. Ein Element $x \in L$ heißt $\bigvee$-*irreduzibel* in L, falls es nicht als Supremum von Elementen dargestellt werden kann, die alle von x verschieden sind, d. h. falls für alle $A \subseteq L$ gilt:

$$x = \bigvee A \quad \Longrightarrow \quad x \in A.$$

Dual werden in L $\bigwedge$-*irreduzible* Elemente definiert. Es bezeichne $\mathcal{J}L$ die Menge der $\bigvee$-irreduziblen und $\mathcal{M}L$ die Menge der $\bigwedge$-irreduziblen Elemente von L.

Die $\bigvee$-Basis eines basierten Verbandes besteht gerade aus seinen $\bigvee$-irreduziblen Elementen:

Proposition 1.2.15. *Für jeden $\bigvee$-Erzeuger J eines vollständigen Verbandes L gilt $\mathcal{J}L \subseteq J$, und es ist genau dann $\mathcal{J}L = J$ (d. h. J der kleinste $\bigvee$-Erzeuger), wenn J eine $\bigvee$-Basis von L ist.* □

Wir wenden uns nun Produkten (quasi-)geordneter Mengen zu.

Definition 1.2.16 (Produkte quasigeordneter Mengen)**.** Sei $P = (\, P_i : i \in I \,)$ eine Familie (quasi-)geordneter Mengen. Dann wird durch die koordinatenweise Ordnung

$$x \leq_P y \quad :\Longleftrightarrow \quad x_i \leq_{P_i} y_i \text{ für alle } i \in I \qquad (x, y \in \textstyle\prod_{i \in I} |P_i|)$$

eine (Quasi-)Ordnung auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i\in I}|P_i|$ festgelegt. Die zugehörige (quasi-)geordnete Menge $(\prod_{i\in I}|P_i|, \leq_P)$ wird mit $\prod P$ oder $\prod_{i\in I} P_i$ bezeichnet und das *Produkt* von P genannt. Entsprechend der Bezeichnung $\leq_P$ für $\leq_{\prod P}$ schreiben wir im folgenden auch $\downarrow_P$ für $\downarrow_{\prod P}$ und $\bigvee_P$ für $\bigvee_{\prod P}$ etc.

Wir übertragen alle geeigneten Schreibweisen und Konventionen für kartesische Produkte von Mengen auch auf Produkte quasigeordneter Mengen. Beispielsweise bezeichnet für eine Familie $P = (P_1, \ldots, P_n)$ quasigeordneter Mengen $P_1 \times \ \ldots \times P_n$ das Produkt $\prod P$, und für $i \in \underline{n}$ und eine weitere quasigeordnete Menge Q ist $P[i \mapsto Q] = P_1 \times \ \ldots \times Q \times \ \ldots \times P_n$. Speziell steht Q^n für das n-fache Produkt $Q \times \ \ldots \times Q$, wobei sich im Fall $n = 0$ das leere Produkt $\mathbf{1} = \prod \emptyset$ ergibt. $\mathbf{1} \times Q$, $Q \times \mathbf{1}$ und Q^1 werden mit Q identifiziert. Unter einer mehrstelligen Abbildung von $P_1, \ldots, P_n$ in Q verstehen wir eine gewöhnliche Funktion von $\prod P$ in Q, also eine Abbildung von $|P_1|, \ldots, |P_n|$ in $|Q|$.

Lemma 1.2.17. *Sei $L = (\, L_i : i \in I\,)$ eine Familie vollständiger Verbände. Dann ist auch $\prod L$ ein vollständiger Verband, dessen Suprema und Infima koordinatenweise gebildet werden:*

$$\bigvee_L A = \bigvee_{\prod L} A = (\, \bigvee_{L_i} \pi_i[A] : i \in I\,) \quad \text{und} \quad \bigwedge_L A = \bigwedge_{\prod L} A = (\, \bigwedge_{L_i} \pi_i[A] : i \in I\,)$$

für alle $A \subseteq \prod L$. □

Lemma 1.2.18. *Sei $L = (\, L_i : i \in I\,)$ eine Familie vollständiger Verbände, und für jedes $i \in I$ sei J_i ein $\bigvee$-Erzeuger von L_i. Dann ist sowohl die Menge $\{\, \perp_{\prod L}[i \mapsto u_i] : i \in I \ \&\ u_i \in J_i\,\}$ mit $\perp_{\prod L} = (\, \perp_{L_i} : i \in I\,)$ als auch $\prod_{i\in I} J_i$ ein $\bigvee$-Erzeuger von $\prod L$.* □

Schließlich betrachten wir noch (quasi-)geordnete Mengen von Abbildungen.

Definition 1.2.19 (Punktweise Ordnung von Funktionen)**.** Sei X eine Menge und Q eine (quasi-)geordnete Menge. Die punktweise Ordnung auf der Menge $|Q|^X$ aller Abbildungen von X in Q ist festgelegt durch

$$f \leq g \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall x \in X)(f(x) \leq_Q g(x)).$$

Damit ist $Q^X := (|Q|^X, \leq)$ wieder eine (quasi-)geordnete Menge.

Sind P und Q quasigeordnete Mengen, so bezeichnen wir mit Q^P die quasigeordnete Menge aller *isotonen* Abbildungen von P in Q (im Unterschied zur quasigeordneten Menge $Q^{|P|}$ *aller* Abbildungen von P in Q).

Lemma 1.2.20. *Für jede quasigeordnete Menge P sind die folgenden vollständigen Verbände isomorph:*

$$\mathfrak{A}P \cong \mathbf{2}^{P^{\mathrm{op}}} \cong (\mathbf{2}^P)^{\mathrm{op}}.$$

Beweis. Die Abbildung $\chi\colon \mathfrak{A}P \to \mathbf{2}^{P^{\mathrm{op}}}$, die jedem unteren Abschnitt D von P dessen charakteristische Funktion $\chi_D\colon P^{\mathrm{op}} \to \mathbf{2}$ zuordnet, erweist sich als Ordnungsisomorphismus, deren Inverse jedem $f \in \mathbf{2}^{P^{\mathrm{op}}}$ den unteren Abschnitt $f^{-1}[\{1\}]$ zuordnet. □

Korollar 1.2.21. *Für jeden vollständigen Verband M ist auch M^X ein vollständiger Verband, in dem Suprema und Infima punktweise gebildet werden:*

$$(\bigvee \mathcal{F})(x) = \bigvee_M \{\, f(x) : f \in \mathcal{F}\,\} \quad \text{und} \quad (\bigwedge \mathcal{F})(x) = \bigwedge_M \{\, f(x) : f \in \mathcal{F}\,\}$$

für alle $\mathcal{F} \subseteq M^X$ und alle $x \in X$.

Beweis. Für die Familie $L = (\, L_x : x \in X\,)$ mit $L_x := M$ für alle $x \in X$ ist $M^X = \prod L$, und die Behauptung folgt aus Lemma 1.2.17. □

1.2.2 Hüllenoperationen und Adjunktionen

In aller Kürze stellen wir nun die benötigten Grundlagen zu Hüllenoperationen, residuierten Abbildungen und ordnungstheoretischen Adjunktionen zusammen. Für die ausgesparten Beweise sei auf die Literatur verwiesen. Einen umfassenden Überblick zu Hüllenoperationen und verwandten Begriffen gibt [36], und zwei exzellente Quellen zu Adjunktionen und Galois-Verbindungen sind [38] und [34].

Definition 1.2.22 (Hüllenoperationen und Hüllenbereiche)**.** Sei P eine geordnete Menge. Eine isotone Abbildung $\gamma\colon P \to P$ heißt *Hüllenoperation auf* P, falls gilt:

$$\mathrm{id}_P \leq \gamma \ (\textit{Extensivität}) \quad \text{und} \quad \gamma \circ \gamma \leq \gamma.$$

Ist γ eine Hüllenoperation auf P, so gilt $\gamma \circ \gamma = \gamma$, d. h. γ ist *idempotent*. Für ein Element $x \in P$ nennt man dann $\gamma(x)$ die *Hülle* oder den *Abschluss von* x, und im Fall $\gamma(x) = x$ heißt x *abgeschlossen* bezüglich γ. Die geordnete Menge $(\gamma[P], \leq)$, wobei $\leq$ durch $\leq_P$ induziert ist, wird *Hüllenbereich* von γ genannt und besteht aus den abgeschlossenen Elementen:

$$\gamma[P] = \{\, \gamma(x) : x \in P \,\} = \{\, x \in P : \gamma(x) = x \,\}.$$

Eine *Kernoperation auf* P ist eine Hüllenoperation auf P^{op}. Für eine Kernoperation κ auf P gilt insbesondere $\kappa \leq \mathrm{id}_P$ (*Kontraktivität*), und $(\kappa[P], \leq)$ wird *Kernbereich* von κ genannt.

Hüllen- und Kernoperationen lassen sich ebenso auf quasigeordneten Mengen definieren, dies wird im folgenden aber nicht benötigt. In der Literatur wird eine Hüllenoperation manchmal auch als Hüllenoperator bezeichnet. Wir verstehen unter Hüllenoperatoren allerdings spezielle Hüllenoperationen:

Definition 1.2.23 (Hüllenoperatoren)**.** Sei X eine Menge. Eine Hüllenoperation Γ auf dem Potenzmengenverband $\mathfrak{P}X = (\mathcal{P}X, \subseteq)$ heißt *Hüllenoperator* auf der Menge X.

Proposition 1.2.24. *Sei P eine geordnete Menge. Eine Abbildung γ auf P ist genau dann eine Hüllenoperation, wenn*

$$x \leq \gamma(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(x) \leq \gamma(y)$$

für alle $x, y \in P$ gilt. □

Lemma 1.2.25. *Sei γ eine Hüllenoperation auf der geordneten Menge P. Für alle $x \in P$ gilt:*

$$\gamma(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall y \in P)(y \leq x \Rightarrow \gamma(y) \leq x).$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Aus $y \leq x$ folgt $\gamma(y) \leq \gamma(x) = x$, da γ isoton ist. „$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung gilt insbesondere $\gamma(x) \leq x$, also $\gamma(x) = x$ wegen der Extensivität von γ. □

Hüllenoperationen lassen sich gleichwertig durch Hüllensysteme beschreiben.

Definition 1.2.26 (Hüllensysteme)**.** Ein *Hüllensystem* einer geordneten Menge P ist eine Teilmenge C von P, so dass es zu jedem $x \in P$ ein kleinstes $y \in C$ mit $x \leq y$ gibt.

Speziell für Potenzmengenverbände legen wir fest: Ein *Hüllensystem auf* einer Menge X ist ein Hüllensystem von $\mathfrak{P}X$.

Proposition 1.2.27. *Sei P eine geordnete Menge. Für jede Hüllenoperation γ auf P ist $\gamma[P]$ ein Hüllensystem von P. Umgekehrt lässt sich für jedes Hüllensystem $C \subseteq P$ eine Hüllenoperation γ^C auf P festlegen durch*

$$\gamma^C(x) = \min_P\{\, y \in C : x \leq_P y \,\}.$$

Die Abbildungen $\gamma \mapsto \gamma[P]$ und $C \mapsto \gamma^C$ sind zueinander inverse duale Isomorphismen zwischen den geordneten Mengen

- *aller Hüllenoperationen auf P (mit der punktweisen Ordnung) und*
- *aller Hüllensysteme von P (mit der Inklusionsordnung).* □

Hüllensysteme sind also gerade die Grundmengen von Hüllenbereichen. Im Falle vollständiger Verbände lassen sich Hüllensysteme auch auf folgende Weise charakterisieren:

Proposition 1.2.28. *Die Hüllensysteme eines vollständigen Verbandes sind genau seine $\bigwedge$-abgeschlossenen Teilmengen.* □

Speziell sind die Hüllensysteme auf einer Menge gerade die gegen beliebige Durchschnitte abgeschlossenen Mengensysteme.

Korollar 1.2.29. *Durch $\gamma \mapsto \gamma[L]$ und $M \mapsto \bigwedge_L\{\, y \in M : x \leq_L y \,\}$ erhält man zueinander inverse duale Isomorphismen zwischen den vollständigen Verbänden*

- *aller Hüllenoperationen auf L (mit der punktweisen Ordnung) und*
- *aller $\bigwedge$-abgeschlossenen Teilmengen von L (mit der Inklusionsordnung).* □

Hüllenbereiche von Hüllenoperationen auf vollständigen Verbänden sind wieder vollständige Verbände:

Proposition 1.2.30. *Sei L ein vollständiger Verband und γ eine Hüllenoperation auf L. Dann ist auch der Hüllenbereich $(\gamma[L], \leq)$ ein vollständiger Verband, in dem Suprema und Infima wie folgt gebildet werden:*

$$\bigvee A = \gamma\Big(\bigvee\nolimits_L A\Big) \quad \textit{und} \quad \bigwedge A = \bigwedge\nolimits_L A$$

für alle $A \subseteq \gamma[L]$. □

Wir behandeln als nächstes Adjunktionen und residuierte Abbildungen. An der folgenden Definition lässt sich sofort erkennen, dass ordnungstheoretische Adjunktionen dasselbe sind wie kategorientheoretische, sofern geordnete Mengen als Kategorien aufgefasst werden (siehe Definition 1.3.8 und Beispiel 1.3.11); vergleiche außerdem Beispiel 2.3.15.

Definition 1.2.31 (Adjunktionen zwischen geordneten Mengen)**.** Seien P und Q geordnete Mengen. Eine *Adjunktion* oder ein *adjungiertes Paar* (f, g) *zwischen* P *und* Q besteht aus isotonen Abbildungen $f\colon P \to Q$ und $g\colon Q \to P$ mit

$$\mathrm{id}_P \leq g \circ f \quad \text{und} \quad f \circ g \leq \mathrm{id}_Q.$$

Dabei heißt f *untere Adjungierte* oder *Linksadjungierte* (von g), und g heißt *obere Adjungierte* oder *Rechtsadjungierte* (von f). Für die Aussage, dass (f, g) eine Adjunktion ist, schreiben wir auch

$$f \dashv g.$$

Eine Abbildung $f\colon P \to Q$ heißt *co-adjungiert*, falls es ein $g\colon Q \to P$ gibt, so dass (f, g) eine Adjunktion ist; analog heißt eine Abbildung g *adjungiert*, falls (f, g) eine Adjunktion für ein geeignetes f ist.

Die Komponenten eines adjungierten Paares (f, g) legen einander eindeutig fest (vgl. Proposition 2.3.11). Daher schreiben wir f^* für *die* obere Adjungierte g von f und g_* für *die* untere Adjungierte f von g.

Aus $f \dashv g$ folgt

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{und} \quad g \circ f \circ g = g$$

(siehe Lemma 2.3.10), und für jeden Ordnungsisomorphismus $f\colon P \to Q$ gilt offensichtlich $f \dashv f^{-1}$, insbesondere also $\mathrm{id}_P \dashv \mathrm{id}_P$.

Für jede Adjunktion (f, g) zwischen P und Q ist (g, f) eine Adjunktion zwischen Q^{op} und P^{op}. Ist darüber hinaus (f', g') eine Adjunktion zwischen Q und einer weiteren geordneten Menge O, so erhält man durch $(f' \circ f, g \circ g')$ eine Adjunktion zwischen P und O (siehe auch Proposition 2.3.11).

Proposition 1.2.32. *Zwei Abbildungen $f\colon P \to Q$ und $g\colon Q \to P$ zwischen geordneten Mengen P und Q bilden genau dann eine Adjunktion (f, g), wenn sie die Bedingung*

$$x \leq_P g(y) \iff f(x) \leq_Q y$$

für alle $x \in P$ und alle $y \in Q$ erfüllen. □

Proposition 1.2.33. *Für jedes adjungierte Paar (f, g) zwischen geordneten Mengen P und Q gilt:*

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\iff g \text{ surjektiv} \iff g \circ f = \mathrm{id}_P, \\ g \text{ injektiv} &\iff f \text{ surjektiv} \iff f \circ g = \mathrm{id}_Q. \end{aligned}$$

Sind also f und g beide injektiv (bzw. beide surjektiv), so sind sie bereits zueinander inverse Ordnungsisomorphismen. □

Eine Verschärfung der zur Isotonie äquivalenten Bedingung aus Lemma 1.2.5 führt auf den Begriff der Residuiertheit.

Definition 1.2.34 (Residuiertheit und duale Residuiertheit)**.** Eine Abbildung $f\colon P \to Q$ zwischen geordneten Mengen heißt *residuiert*, falls Urbilder von Hauptidealen in Q unter f wieder Hauptideale in P sind (d. h. $f_{\leftarrow}$ Hauptideale erhält).

Dual heißt eine Abbildung $g\colon Q \to P$ *residual* (oder *dual residuiert*), wenn $g_{\leftarrow}$ Hauptfilter bewahrt.

Residuierte Abbildungen sind dasselbe wie co-adjungierte (also insbesondere isoton) und im Falle vollständiger Verbände auch dasselbe wie $\bigvee$-erhaltende Abbildungen:

Proposition 1.2.35. *Seien P und Q geordnete Mengen. Eine Abbildung $f\colon P \to Q$ ist genau dann co-adjungiert, wenn sie residuiert ist. Ihre obere Adjungierte f^* ist dann gegeben durch*

$$f^*(y) = \max_P\{\, x \in P : f(x) \leq_Q y \,\} = \max_P f^{-1}[{\downarrow_Q} y].$$

Eine Abbildung $g\colon Q \to P$ ist genau dann adjungiert, wenn sie dual residuiert ist. Ihre untere Adjungierte g_* ist in diesem Fall gegeben durch

$$g_*(x) = \min_Q\{\, y \in Q : x \leq_P g(y) \,\} = \min_Q g^{-1}[{\uparrow_P} x].$$

Jede residuierte Abbildung zwischen geordneten Mengen erhält existierende Suprema, und jede dual residuierte erhält existierende Infima. Zwischen vollständigen Verbänden sind die residuierten Abbildungen sogar genau die $\bigvee$-erhaltenden, und die dual residuierten sind genau die $\bigwedge$-erhaltenden. □

Im folgenden werden wir über co-adjungierte bzw. $\bigvee$-erhaltende Abbildungen meistens in der Terminologie der Residuiertheit sprechen. Die obere Adjungierte f^* einer residuierten Abbildung f wird dann auch das *Residual* von f genannt.

Die oben erwähnte Verknüpfung von Adjunktionen impliziert, dass mit $f\colon P \to Q$ und $h\colon Q \to O$ auch die Abbildung $h \circ f\colon P \to O$ residuiert ist und das Residual $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$ besitzt.

Es folgen einige nützliche Feststellungen zu residuierten Abbildungen im Zusammenhang mit $\bigvee$-Erzeugern.

Proposition 1.2.36. *Seien P, Q geordnete Mengen, $f, h\colon P \to Q$ residuierte Abbildungen und J eine $\bigvee$-dichte Teilmenge von P. Es gilt*

$$f \restriction J \leq h \restriction J \quad\iff\quad f \leq h.$$

Stimmen also f und h auf J überein, so ist $f = h$.

Beweis. Es sei $f \restriction J \leq h \restriction J$. Dann gilt für alle $x \in P$ und alle $u \in J$

$$u \leq x \quad\Longrightarrow\quad f(u) \leq h(u) \leq h(x) \quad\Longrightarrow\quad u \leq f^*(h(x)),$$

also $x \leq f^*(h(x))$ und somit $f(x) \leq h(x)$. □

Proposition 1.2.37. *Seien P und Q geordnete Mengen. Ist $f\colon P \to Q$ residuiert und J ein $\bigvee$-Erzeuger von P, so ist $f[J]$ ein $\bigvee$-Erzeuger der geordneten Menge $(f[P], \leq)$, wobei $\leq$ die durch $\leq_Q$ induzierte Ordnung auf $f[P]$ ist.*

Beweis. Es seien $x, y \in f[P]$, und für alle $j \in J$ gelte $f(j) \leq x \Rightarrow f(j) \leq y$, also auch $j \leq f^*(x) \Rightarrow j \leq f^*(y)$. Nach Voraussetzung ist J $\bigvee$-dicht in P, also ergibt sich $f^*(x) \leq f^*(y)$, d. h. $f(f^*(x)) \leq y$. Wegen $x \in f[P]$ ist $x = f(f^*(x))$. Damit folgt $x \leq y$ und insgesamt die Behauptung. □

Lemma 1.2.38. *Seien L, M vollständige Verbände und J ein $\bigvee$-Erzeuger von L. Für jede residuierte Abbildung $f\colon L \to M$ ist*

$$f(x) = \bigvee_M\{\, f(u) : x \geq_L u \in J \,\} = \bigvee_M f[{\downarrow_L} x \cap J]$$

für alle $x \in L$. □

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[d, shift right, "\gamma^\bullet"'] \arrow[dr, "f^\bullet" near end] & Q \arrow[l, shift right, "g"'] \arrow[d, shift right, "\kappa^\bullet"'] \arrow[dl, "g^\bullet" near end] \\
\gamma[P] = g[Q] \arrow[u, shift right, "\gamma^\circ"'] \arrow[r, shift right, "\tilde{f}"'] & f[P] = \kappa[Q] \arrow[u, shift right, "\kappa^\circ"'] \arrow[l, shift right, "\tilde{g}"']
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1.1: Zur Adjunktion (f, g) in Theorem 1.2.41

Für punktweise geordnete Mengen residuierter Abbildungen führen wir eigene Bezeichnungen ein.

Definition 1.2.39 (Geordnete Mengen residuierter Abbildungen)**.** Seien P und Q geordnete Mengen. Es bezeichne

$$\mathsf{res}(P; Q)$$

die durch die punktweise Ordnung von Abbildungen geordnete Menge aller residuierten Abbildungen von P in Q.

Das punktweise Supremum $\bigvee$-erhaltender Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden ergibt wieder eine $\bigvee$-erhaltende Abbildung:

Proposition 1.2.40. *Seien L, M vollständige Verbände. Dann ist auch $\mathsf{res}(L; M)$ ein vollständiger Verband, in dem Suprema punktweise gebildet werden.* □

Residuierte Abbildungen hängen eng mit Hüllenoperationen zusammen. Zunächst induzieren Adjunktionen stets Hüllen- und Kernoperationen:

Theorem 1.2.41. *Für jede Adjunktion (f, g) zwischen geordneten Mengen P und Q ist $\gamma := g \circ f$ eine Hüllenoperation auf P und $\kappa := f \circ g$ eine Kernoperation auf Q. Die zugehörigen Hüllen- bzw. Kernbereiche sind in diesem Fall durch die Bildbereiche von f bzw. g gegeben:*

$$\gamma[P] = g[Q] \quad \textit{und} \quad \kappa[Q] = f[P].$$

Darüber hinaus sind $\tilde{f} \colon x \mapsto f(x)$ und $\tilde{g} \colon x \mapsto g(x)$ zueinander inverse Ordnungsisomorphismen zwischen dem Hüllenbereich $(\gamma[P], \leq)$ und dem Kernbereich $(\kappa[Q], \leq)$ mit

$$f = \kappa^\circ \circ \tilde{f} \circ \gamma^\bullet \quad \textit{und} \quad g = \gamma^\circ \circ \tilde{g} \circ \kappa^\bullet$$

(siehe Abbildung 1.1). □

Umgekehrt wird jede Hüllenoperation durch eine Adjunktion induziert:

Lemma 1.2.42. *Für jede Hüllenoperation γ auf P ist $(\gamma^\bullet, \gamma^\circ)$ eine Adjunktion zwischen P und $(\gamma[P], \leq)$ mit*

$$\gamma^\circ \circ \gamma^\bullet = \gamma \quad \textit{und} \quad \gamma^\bullet \circ \gamma^\circ = \mathrm{id}_{\gamma[P]}.$$

Beweis. Da γ eine Hüllenoperation ist, gilt $\mathrm{id}_P \leq \gamma = \gamma^\circ \circ \gamma^\bullet$, und für alle $x \in \gamma[P]$ ist $(\gamma^\bullet \circ \gamma^\circ)(x) = \gamma(x) = x$, also $\gamma^\bullet \circ \gamma^\circ = \mathrm{id}_{\gamma[P]}$. □

Abschließend betrachten wir noch den Spezialfall residuierter Hüllenoperationen.

Proposition 1.2.43. *Sei P eine geordnete Menge und $\gamma\colon P \to P$ eine residuierte Abbildung. Es sind äquivalent:*

(1) γ *ist eine Hüllenoperation auf* P.

(2) $\gamma = \gamma^* \circ \gamma$.

(1)* γ^* *ist eine Kernoperation auf* P.

(2)* $\gamma^* = \gamma \circ \gamma^*$.

Beweis. Siehe [11, Theorem 2.10]. □

Korollar 1.2.44. *Sei P eine geordnete Menge und γ eine residuierte Hüllenoperation auf P. Dann gilt für jedes $x \in P$*

$$\gamma^*(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(x) = x,$$

also $\gamma^*[P] = \gamma[P]$.

Beweis. Nach Voraussetzung und Proposition 1.2.43 ist γ^* eine Kernoperation, und es gilt $\gamma^*(x) = x \Leftrightarrow \gamma^*(x) \geq x \Leftrightarrow \gamma(x) \leq x \Leftrightarrow \gamma(x) = x$ wegen $\gamma^* \leq \mathrm{id}_P \leq \gamma$. □

1.3 Kategorientheoretische Voraussetzungen

Wir setzen grundlegende Kenntnisse der Kategorientheorie voraus, wie sie etwa in [12] oder [66] gegeben werden, und beschränken uns darauf, die wichtigsten Grundbegriffe zu beschreiben. Es sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass Kategorien im folgenden mittels Morphismenmengen eingeführt werden. Auch Funktoren werden danach im Hinblick auf Morphismenmengen definiert, was für spätere Verallgemeinerungen von Vorteil ist.

1.3.1 Kategorien, Funktoren, natürliche Transformationen

Definition 1.3.1 (Kategorien)**.** Eine *Kategorie* $\mathcal{A}$ besteht aus den folgenden Komponenten:

- einer Klasse $|\mathcal{A}|$, deren Elemente *Objekte* der Kategorie genannt werden;
- für alle Objekte $A, B \in |\mathcal{A}|$ einer Menge $\mathcal{A}(A, B)$, deren Elemente *Morphismen von A nach B* genannt werden;
- für alle Objekte $A, B, C \in |\mathcal{A}|$ einer zweistelligen Abbildung (*Komposition*)

  $$\circ_{ABC}\colon \mathcal{A}(B, C) \times \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, C),$$

  wobei im folgenden $g \circ f$ für $\circ_{ABC}(g, f)$ geschrieben wird;
- für jedes Objekt $A \in |\mathcal{A}|$ einem Morphismus $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$, der *Identität* auf A genannt wird.

Dabei seien die nachstehenden Axiome erfüllt.

- *Assoziativität*: Für alle Morphismen $f \in \mathcal{A}(A,B)$, $g \in \mathcal{A}(B,C)$, $h \in \mathcal{A}(C,D)$ gilt
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Identität*: Für alle Morphismen $f \in \mathcal{A}(A,B)$ ist
$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A.$$

Wir verwenden die Schreibweise $f\colon A \to B$ für die Aussage $f \in \mathcal{A}(A,B)$. Dabei heißt A *Quelle* (*Domain*) und B *Ziel* (*Co-Domain*) des Morphismus f.[3] Auf jedem $\mathcal{A}$-Objekt A gibt es genau eine Identität $1_A\colon A \to A$.

Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *klein*, falls $|\mathcal{A}|$ eine Menge ist, und $\mathcal{A}$ heißt *dünn*, falls jede Morphismenmenge $\mathcal{A}(A,B)$ höchstens ein Element enthält. Die zu $\mathcal{A}$ *duale* Kategorie wird mit $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ bezeichnet.

Eine Kategorie $\mathcal{B}$ ist eine *Unterkategorie* von $\mathcal{A}$, falls $|\mathcal{B}| \subseteq |\mathcal{A}|$ und $\mathcal{B}(A,B) \subseteq \mathcal{A}(A,B)$ für alle $A, B \in |\mathcal{B}|$ gilt, die Kompositionsabbildungen von $\mathcal{B}$ durch Restriktion aus denen von $\mathcal{A}$ entstehen und für alle $A \in |\mathcal{B}|$ die $\mathcal{B}$-Identität 1_A auch die $\mathcal{A}$-Identität auf A ist. $\mathcal{B}$ ist eine *volle* Unterkategorie von $\mathcal{A}$, falls darüber hinaus $\mathcal{B}(A,B) = \mathcal{A}(A,B)$ für alle $A, B \in |\mathcal{B}|$ erfüllt ist.

Notation 1.3.2 (Bezeichnungen einiger Kategorien)**.** Die in der folgenden Tabelle aufgeführten Kategorien werden später häufig benötigt.

Bezeichnung	Objekte und Morphismen
Set	Mengen und Abbildungen
Rel	Mengen und Relationen
Qos	Quasigeordnete Mengen und isotone Abbildungen
Pos	Geordnete Mengen und isotone Abbildungen
SL	Vollständige Verbände und residuierte Abbildungen
CL	Vollständige Verbände und vollständige Homomorphismen

In allen diesen Kategorien ist die Komposition die übliche Komposition $\circ$ von Funktionen bzw. Relationen, und die Identitäten 1_A sind die mengentheoretischen Identitäten id_A. Offensichtlich ist Set eine Unterkategorie von Rel, und Pos ist eine volle Unterkategorie von Qos.

Beispiel 1.3.3. Jede quasigeordnete Menge $Q = (|Q|, \leq_Q)$ lässt sich als (kleine und dünne) Kategorie auffassen: Die Elemente von $|Q|$ sind die Objekte der Kategorie, und für $x, y \in |Q|$ gibt es genau dann einen Morphismus $x \to y$, wenn $x \leq_Q y$ gilt. Mit $0 = \emptyset$ und $1 = \{0\}$ lassen sich die Morphismenmengen von Q etwa festlegen durch
$$Q(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq_Q y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Die Transitivität der Quasiordnung liefert dann eine eindeutige Komposition für diese Morphismen, und aufgrund der Reflexivität existieren alle Identitäten.

3 Man beachte, dass Domain und Co-Domain eines Morphismus hier nicht eindeutig bestimmt sein müssen, da keine paarweise Disjunktheit der Morphismenmengen gefordert wurde.

Definition 1.3.4 (Funktoren)**.** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien. Ein *Funktor* $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ordnet

- allen Objekten $A \in |\mathcal{A}|$ ein Objekt $F(A) \in |\mathcal{B}|$ zu (oft einfach als FA geschrieben) und
- allen Objekten $A, A' \in |\mathcal{A}|$ eine Abbildung $F_{AA'}\colon \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$ zu (wobei meistens $F(f)$ oder Ff für $F_{AA'}(f)$ geschrieben wird),

so dass gilt:

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in \mathcal{A}(A, A')$, $g \in \mathcal{A}(A', A'')$,
- $F(1_A) = 1_{FA}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$.

Durch punktweise Komposition ergibt sich aus zwei Funktoren $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein neuer Funktor $G \circ F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. Es sei $1_{\mathcal{A}}$ der *Identitätsfunktor* auf $\mathcal{A}$ mit $(1_{\mathcal{A}})_{AB} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(A,B)}$. Mit Cat bezeichnen wir die Kategorie aller kleinen Kategorien und Funktoren mit der angegebenen Komposition und den Identitäten $1_{\mathcal{A}}$.

Ist $\mathcal{B}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{A}$, so erhält man durch die Inklusionsabbildungen $B \mapsto B$ und $f \mapsto f$ den *Inklusionsfunktor* $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Definition 1.3.5 (Natürliche Transformationen und vertikale Komposition)**.** Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Kategorien und $F, G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\alpha\colon F \Rightarrow G$ ordnet jedem $A \in |\mathcal{A}|$ einen $\mathcal{B}$-Morphismus $\alpha_A\colon FA \to GA$ zu, so dass für alle $f \in \mathcal{A}(A, A')$ gilt:

$$\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A.$$

Sind F, F', F'' Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und $\alpha\colon F \Rightarrow F'$, $\alpha'\colon F' \Rightarrow F''$ natürliche Transformationen, so wird durch

$$(\alpha' \bullet \alpha)_A = \alpha'_A \circ \alpha_A$$

eine natürliche Transformation $\alpha' \bullet \alpha\colon F \Rightarrow F''$ festgelegt (siehe Abbildung 1.2).

Für jeden Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei die identische natürliche Transformation $1_F\colon F \Rightarrow F$ definiert durch $(1_F)_A = 1_{FA}$. Auf diese Weise ergibt sich für jede kleine Kategorie $\mathcal{A}$ und jede Kategorie $\mathcal{B}$ die *Funktorkategorie* $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, die als Objekte alle Funktoren $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und als Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren besitzt.

Definition 1.3.6 (Natürliche Isomorphismen)**.** Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Kategorien und $F, G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren. Unter einem *natürlichen Isomorphismus* $\alpha\colon F \cong G$ verstehen wir eine natürliche Transformation $\alpha\colon F \Rightarrow G$, für die jede Komponente $\alpha_A\colon FA \to GA$ in $\mathcal{B}$ invertierbar ist.

Im folgenden wird dafür auch die folgende Sprechweise verwendet: $\alpha_A\colon FA \cong GA$ ist ein *Isomorphismus, der in der Variablen A natürlich ist.*

Ist $\mathcal{A}$ eine kleine Kategorie, so ist ein natürlicher Isomorphismus $\alpha\colon F \cong G$ für $F, G \in |\mathcal{B}^{\mathcal{A}}|$ tatsächlich ein Isomorphismus in der Kategorie $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$.

Neben der vertikalen Verknüpfung von natürlichen Transformationen gibt es auch eine horizontale:

Definition 1.3.7 (Horizontale Komposition natürlicher Transformationen)**.** Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Kategorien, $F, F'\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G, G'\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren sowie $\alpha\colon F \Rightarrow F'$ und $\beta\colon G \Rightarrow G'$ natürliche Transformationen. Dann wird durch die Komponenten

$$(\beta * \alpha)_A := G'(\alpha_A) \circ \beta_{FA} = \beta_{F'A} \circ G(\alpha_A)$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "F'" near start] \arrow[r, bend right=50, "F''"' near start] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha" near end] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\alpha'" near end] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=50, "G"] \arrow[r, "G'" near start] \arrow[r, bend right=50, "G''"' near start] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\beta" near end] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta'" near end] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1.2: Zur vertikalen und horizontalen Komposition

eine natürliche Transformation $\beta * \alpha\colon G \circ F \Rightarrow G' \circ F'$ festgelegt (siehe Abbildung 1.2).

Sind darüber hinaus Funktoren $F''\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G''\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sowie natürliche Transformationen $\alpha'\colon F' \Rightarrow F''$ und $\beta'\colon G' \Rightarrow G''$ gegeben, so lässt sich das sogenannte *Austauschgesetz* beweisen:

$$(\beta' * \alpha') \bullet (\beta * \alpha) = (\beta' \bullet \beta) * (\alpha' \bullet \alpha).$$

Für $\beta * 1_F$ finden sich in der Literatur häufig die Schreibweisen $\beta * F$ oder einfach βF, ebenso wird für $1_G * \alpha$ auch $G * \alpha$ oder $G\alpha$ geschrieben.

Das Austauschgesetz zeigt, dass die Komposition c von Funktoren,

$$c_{\mathcal{ABC}}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \times \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \quad c_{\mathcal{ABC}}(G, F) = G \circ F,$$

durch $c_{\mathcal{ABC}}(\beta, \alpha) = \beta * \alpha$ zu einem Funktor fortgesetzt werden kann, denn es gilt außerdem $c_{\mathcal{ABC}}(1_G, 1_F) = 1_{c_{\mathcal{ABC}}(G,F)}$.

1.3.2 Adjunktionen und Äquivalenzen

Ein zentrales Konzept der Kategorientheorie ist das des adjungierten Funktors. Wir geben zunächst eine rein algebraische Beschreibung.

Definition 1.3.8 (Adjunktionen)**.** Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Kategorien und $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Der Funktor G ist *rechtsadjungiert* zu F (und F ist *linksadjungiert* zu G), in Zeichen $F \dashv G$, wenn es natürliche Transformationen

$$\eta\colon 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F \quad \text{und} \quad \varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$$

gibt, so dass die sogenannten *Dreiecksgleichungen*

$$(\varepsilon * 1_F) \bullet (1_F * \eta) = 1_F, \qquad (1_G * \varepsilon) \bullet (\eta * 1_G) = 1_G$$

erfüllt sind, d. h. es gilt $\varepsilon_{FA} \circ F\eta_A = 1_{FA}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und $G\varepsilon_B \circ \eta_{GB} = 1_{GB}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$ (siehe Abbildung 1.3).

In diesem Fall nennt man (F, G) auch ein *adjungiertes Paar* und $(F, G, \eta, \varepsilon)$ eine *adjungierte Situation* oder *Adjunktion* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Dabei heißt η die *Einheit* und ε die *Co-Einheit* der Adjunktion.

Ein Funktor ist *adjungiert*, wenn er einen Linksadjungierten besitzt, und *co-adjungiert*, wenn er einen Rechtsadjungierten besitzt.

Adjungierte Situationen lassen sich folgendermaßen verknüpfen:

$$
\begin{tikzcd}
F \circ 1_{\mathcal{A}} \arrow[r, "1_F * \eta"] \arrow[dr, equal] & F \circ G \circ F \arrow[d, "\varepsilon * 1_F"] \\
& 1_{\mathcal{B}} \circ F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{A}} \circ G \arrow[r, "\eta * 1_G"] \arrow[dr, equal] & G \circ F \circ G \arrow[d, "1_G * \varepsilon"] \\
& G \circ 1_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1.3: Dreiecksgleichungen

Proposition 1.3.9. *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Kategorien. Sind*

$$(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \qquad (F', G', \eta', \varepsilon')\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

adjungierte Situationen, so ist auch

$$(F' \circ F, G \circ G', (1_G * \eta' * 1_F) \bullet \eta, \varepsilon' \bullet (1_{F'} * \varepsilon * 1_{G'}))\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$$

eine adjungierte Situation. □

Theorem 1.3.10. *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Kategorien und $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Es gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es eine Bijektion*

$$\varphi_{AB}\colon \mathcal{B}(FA, B) \cong \mathcal{A}(A, GB)$$

gibt, die in A und B natürlich ist.

Darüber hinaus ist durch (F, G, φ) eine adjungierte Situation $(F, G, \eta, \varepsilon)$ eindeutig festgelegt: Aus φ erhält man η und ε durch

$$\eta_A = \varphi_{A,FA}(1_{FA}) \quad \text{und} \quad \varepsilon_B = \varphi^{-1}_{GB,B}(1_{GB});$$

umgekehrt ergibt sich φ aus η bzw. ε durch $\varphi_{AB}(f) = Gf \circ \eta_A$ und $\varphi^{-1}_{AB}(g) = \varepsilon_B \circ Fg$. □

Beispiel 1.3.11. Seien P, Q quasigeordnete Mengen, aufgefasst als Kategorien. Funktoren $P \to Q$ entsprechen dann gerade den isotonen Abbildungen von P in Q. Zu zwei solchen Funktoren $f, f'\colon P \to Q$ gibt es genau dann eine natürliche Transformation $f \Rightarrow f'$, wenn $f \leq f'$ bezüglich der punktweisen Ordnung isotoner Funktionen gilt.

Adjungierte Paare (f, g) von Funktoren (isotonen Abbildungen) zwischen geordneten Mengen P und Q sind damit genau die ordnungstheoretischen Adjunktionen. Die Existenz von Einheit und Co-Einheit bedeutet hier, dass $\mathrm{id}_P \leq g \circ f$ und $f \circ g \leq \mathrm{id}_Q$ gilt, die Dreiecksgleichungen sind automatisch erfüllt. Der Beschreibung adjungierter Situationen in Theorem 1.3.10 entspricht ordnungstheoretisch

$$f(x) \leq_Q y \quad \iff \quad x \leq_P g(y).$$

Definition 1.3.12 (Reflektive Unterkategorien)**.** Eine Unterkategorie $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ heißt *reflektiv* in $\mathcal{A}$, wenn der Inklusionsfunktor $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ einen Linksadjungierten $R\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt. R heißt dann *Reflektor* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Eine Unterkategorie $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ ist somit genau dann reflektiv in $\mathcal{A}$, wenn es zu jedem $A \in |\mathcal{A}|$ ein $\mathcal{B}$-Objekt RA und einen $\mathcal{A}$-Morphismus $r_A\colon A \to RA$ gibt, so dass zu jedem weiteren $\mathcal{A}$-Morphismus $f\colon A \to B$ in ein $\mathcal{B}$-Objekt B genau ein $\mathcal{B}$-Morphismus $g\colon RA \to B$ existiert mit $f = g \circ r_A$.

Definition 1.3.13 (Eigenschaften von Funktoren)**.** Ein Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt

- *treu*, falls die Abbildungen F_{AB} für alle $A, B \in |\mathcal{A}|$ injektiv sind;
- *voll*, falls die Abbildungen F_{AB} für alle $A, B \in |\mathcal{A}|$ surjektiv sind;
- *wesentlich surjektiv*, falls es zu jedem $B \in |\mathcal{B}|$ ein $A \in |\mathcal{A}|$ mit $FA \cong B$ gibt;
- *Einbettung*, falls F treu und auf den Objekten injektiv ist.

Für eine Unterkategorie $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ ist der Inklusionsfunktor $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ stets eine Einbettung, und er ist genau dann ein voller Funktor, wenn $\mathcal{B}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{A}$ ist.

Ein Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein *Isomorphismus* zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls ein Funktor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ existiert mit $G \circ F = 1_{\mathcal{A}}$ und $F \circ G = 1_{\mathcal{B}}$. Ersetzt man hierbei die Gleichheit durch Isomorphie, so ergibt sich der wichtige Begriff der Äquivalenz von Kategorien.

Definition 1.3.14 (Äquivalenz von Kategorien)**.** Ein Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *Äquivalenz* von Kategorien, falls es einen Funktor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ und natürliche Isomorphismen $G \circ F \cong 1_{\mathcal{A}}$ und $F \circ G \cong 1_{\mathcal{B}}$ gibt.

Eine *adjungierte Äquivalenz* von Kategorien ist eine adjungierte Situation

$$(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$

in der Einheit und Co-Einheit natürliche Isomorphismen sind, d. h. es gilt $\eta\colon 1_{\mathcal{A}} \cong G \circ F$ und $\varepsilon\colon F \circ G \cong 1_{\mathcal{B}}$.

Eine Äquivalenz $F\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$ wird auch *Dualität* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genannt.

Mit $(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist auch $(G, F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ eine adjungierte Äquivalenz. Unter Verwendung des Auswahlaxioms lässt sich zeigen:

Theorem 1.3.15. *Ein Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn er voll, treu und wesentlich surjektiv ist.* □

2 Allgemeine Residuiertheit

Der Begriff der Residuiertheit von Abbildungen zwischen geordneten Mengen wird in diesem Kapitel in zwei Hinsichten verallgemeinert. Zum einen wird er von einstelligen auf mehrstellige Abbildungen ausgedehnt (durch Residuiertheit in jeder Variablen), zum anderen werden die möglichen Dualisierungen aller beteiligten geordneten Mengen mit einbezogen. Auf diese Weise gelangen wir allgemein zu $(\sigma; \tau)$-residuierten Abbildungen.

Zunächst werden dafür die sogenannten Signaturen $(\sigma; \tau) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n; \tau)$ eingeführt. Dies sind endliche Folgen von Vorzeichen, die den etwaigen Übergang zur dualen Ordnung in den verschiedenen Faktoren des Definitionsbereichs und im Zielbereich anzeigen. Als Vorbereitung für die allgemeine Residuiertheit verallgemeinern wir anschließend erst isotone Abbildungen durch Dualisierung zu $(\sigma; \tau)$-monotonen und betrachten dann die vier möglichen Dualisierungen für einstellige residuierte Abbildungen.

Danach werden ausführlich mehrstellige $(\sigma; \tau)$-residuierte Abbildungen zusammen mit ihren Residualen untersucht. Insgesamt formen diese Abbildungen sogenannte $(\sigma; \tau)$-residuierte Familien. Die allgemeine Residuiertheit wird darüber hinaus noch für Funktionen zwischen vollständigen Verbänden charakterisiert.

Einen besonders wichtigen (und bekannten) Fall stellen zweistellige residuierte Abbildungen dar. Diese spielen auch eine wesentliche Rolle im Zusammenhang mit Quantaloiden, welche im letzten Teil des Kapitels betrachtet werden: Quantaloide sind Kategorien, deren Morphismenmengen vollständige Verbände und deren Kompositionsabbildungen in jeder Variablen residuiert sind. Neben den Grundlagen zu Quantaloiden stellen wir schließlich noch alle später benötigten Voraussetzungen zu lokal geordneten 2-Kategorien und adjungierten Morphismen dar.

2.1 Signaturen und Dualisierung

2.1.1 Vorzeichen-Notationen

Wir beginnen mit der Definition von Signaturen und einigen zugehörigen Notationen.

Definition 2.1.1 (Signaturen)**.** Für die *Vorzeichen* $+$ und $-$ sei zunächst wie üblich

$$++ = -- = + \quad \text{und} \quad +- = -+ = -.$$

Sei nun $\sigma \in \{+, -\}^n$ ein n-Tupel von Vorzeichen. Wir setzen

$$+\sigma = \sigma \quad \text{und} \quad -\sigma = (-\sigma_1, \ldots, -\sigma_n),$$

so dass der Ausdruck $\tau\sigma$ für $\tau \in \{+, -\}$ erklärt ist. Ist $\alpha \in \{+, -\}^n$ ein weiteres n-Tupel, so sei

$$\alpha\sigma := (\alpha_1\sigma_1, \ldots, \alpha_n\sigma_n).$$

Damit ist $\alpha\sigma = \sigma\alpha \in \{+, -\}^n$, und für $n = 1$ ergeben sich die obigen Vorzeichenregeln.

Eine *Signatur* ist ein $(n+1)$-Tupel von Vorzeichen, welches wir stets in der Form

$$(\sigma;\tau) = (\sigma_1,\dots,\sigma_n;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$$

schreiben (siehe Konvention 1.1.11), d. h. σ ist immer ein n-Tupel und τ immer ein einzelnes Vorzeichen. Für Signaturen $(\alpha;\beta),(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ gilt also $(\alpha;\beta)(\sigma;\tau) = (\alpha\sigma;\beta\tau) = (\alpha_1\sigma_1,\dots,\alpha_n\sigma_n;\beta\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$.

Signaturen sind beispielsweise $(+,-;-)$ und $(-\sigma;\tau)$. Unsere Definition von Signaturen $(\sigma;\tau)$ ist angelehnt an Dunn [21], wo sie in der Form $(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \mapsto \tau$ geschrieben und *Spuren* genannt werden. Wir führen noch zwei Abkürzungen für Signaturen des speziellen Typs $(+,\dots,+;\tau)$ oder $(-,\dots,-;\tau)$ ein:

Konvention 2.1.2 (Positive und negative n-Tupel)**.** Im folgenden stehe $[+]$ immer für das n-Tupel $(+,\dots,+)$ und $[-]$ immer für das n-Tupel $(-,\dots,-)$, wobei n aus dem Zusammenhang hervorgehe.

Damit ist etwa $([+];-) = (+,\dots,+;-) \in \{+,-\}^{n+1}$, und für $\sigma \in \{+,-\}^n$ folgt $[+]\sigma = +\sigma = \sigma$ und $[-]\sigma = -\sigma$.

Analog zur Schreibweise R^{-i} für die i-te konverse Relation (siehe Definition 1.1.12) erklären wir in Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt die i-konverse Signatur $(\sigma;\tau)^{-i}$. Diese entsteht jedoch im Unterschied zu den Elementen einer konversen Relation nicht nur durch Vertauschen zweier Komponenten, sondern beinhaltet außerdem die Änderung ihrer Vorzeichen.

Definition 2.1.3 (Konverse Signaturen)**.** Für jedes $i \in \underline{n}$ sei die *i-te konverse* (oder *i-konverse*) Signatur von $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ definiert durch

$$(\sigma;\tau)^{-i} = (\sigma[i \mapsto -\tau]; -\sigma_i) = (\sigma_1,\dots,-\tau,\dots,\sigma_n;-\sigma_i) \in \{+,-\}^{n+1}.$$

Offensichtlich ist $((\sigma;\tau)^{-i})^{-i} = (\sigma;\tau)$. Im Fall $n=1$, also $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$, ist $(\sigma;\tau)^{-1} = (-\tau;-\sigma)$. Dies liefert

$$(+;+)^{-1} = (-;-), \quad (-;-)^{-1} = (+;+), \quad (+;-)^{-1} = (+;-), \quad (-;+)^{-1} = (-;+).$$

Wir verwenden Vorzeichen für die Dualisierung ordnungstheoretischer Notationen:

Notation 2.1.4 (Vorzeichen-Schreibweise für quasigeordnete Mengen)**.** Für eine quasigeordnete Menge P und ein Vorzeichen $\sigma \in \{+,-\}$ sei die Schreibweise P^σ bestimmt durch

$$P^+ = P \quad \text{und} \quad P^- = P^{\mathrm{op}}.$$

Entsprechend stehe $\leq_P^+$ für $\leq_P$ und $\leq_P^-$ für $\leq_{P^{\mathrm{op}}} = \geq_P$, d. h. es ist $\geq_P^\sigma = \leq_P^{-\sigma}$.

Diese Notation wird auf Abschnittsoperatoren und weitere ordnungstheoretische Bezeichnungen ausgedehnt: Es sei $\downarrow_P^\sigma = \downarrow_{P^\sigma}$ und $\uparrow_P^\sigma = \uparrow_{P^\sigma}$, also insbesondere $\downarrow_P^- = \uparrow_P$. Ist P eine geordnete Menge, so schreiben wir im Falle existierender Suprema bzw. Infima ebenso $\bigvee_P^\sigma$ für $\bigvee_{P^\sigma}$, also insbesondere $\bigvee_P^-$ für $\bigwedge_P$. Außerdem sei $\max_P^\sigma$ dasselbe wie $\max_{P^\sigma}$, d. h. $\max_P^-$ steht für $\min_P$.

Die nachfolgend erklärte Schreibweise erlaubt nun für mehrstellige Abbildungen zwischen quasigeordneten Mengen eine flexible Kennzeichnung, welche Faktoren des Definitionsbereichs dualisiert werden.

Definition 2.1.5 (σ-Dualisierung)**.** Sei $P = (P_1, \dots, P_n)$ eine Familie quasigeordneter Mengen. Für $\sigma \in \{+, -\}^n$ sei die *σ-Dualisierung* von P festgelegt durch

$$P^\sigma = (P_1^{\sigma_1}, \dots, P_n^{\sigma_n}).$$

Damit ist insbesondere $\prod P^\sigma = \prod_{i=1}^n P_i^{\sigma_i}$. Wir schreiben $\leq_P^\sigma$ für $\leq_{P^\sigma}$. Für alle $x, y \in \prod P$ gilt also

$$x \leq_P^\sigma y \quad\iff\quad x_i \leq_{P_i}^{\sigma_i} y_i \text{ für alle } i \in \underline{n}.$$

Analog zum Fall $n = 1$ stehe $\downarrow_P^\sigma$ für $\downarrow_{P^\sigma}$ (also eigentlich $\downarrow_{\prod P^\sigma}$) und $\bigvee_P^\sigma$ für $\bigvee_{P^\sigma}$ etc.

Später ist es günstig, die Vorzeichen-Schreibweise auch für die Identität bzw. die Komplement-Abbildung auf Potenzmengenverbänden $\mathfrak{P}X$ zu benutzen. Für $\sigma \in \{+, -\}$ und $A \subseteq X$ ist σA gegeben durch $+A = A$ und $-A = X \setminus A$.

2.1.2 $(\sigma; \tau)$-Monotonie

Die Verallgemeinerung der Isotonie einstelliger Abbildungen auf mehrstellige Abbildungen durch Isotonie in jeder Variablen liefert nichts Neues, wie die folgende Proposition zeigt. Für ihre Formulierung sei an die Schreibweise f_i^a für die Reduktion einer mehrstelligen Abbildung f auf die i-te Koordinate aus Notation 1.1.15 erinnert.

Proposition 2.1.6. *Sei $(P; Q) = (P_1, \dots, P_n; Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen. Eine Abbildung $f\colon \prod P \to Q$ ist genau dann isoton, wenn $f\colon P \to Q$ in jeder Variablen isoton ist (d. h. für alle $i \in \underline{n}$ und alle $a \in \prod P$ ist $f_i^a\colon P_i \to Q$ isoton).*

Beweis. Ist f als einstellige Funktion isoton, so gilt für alle $i \in \underline{n}$, $a \in \prod P$ und $x, y \in P_i$:

$$\begin{aligned} x \leq_{P_i} y \quad &\Longrightarrow \quad a[i \mapsto x] \leq_P a[i \mapsto y] \\ &\Longrightarrow \quad f_i^a(x) = f(a[i \mapsto x]) \leq_Q f(a[i \mapsto y]) = f_i^a(y). \end{aligned}$$

Die Umkehrung ergibt sich mit vollständiger Induktion über die Stellenzahl n von f: Für $n = 0$ und $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also f eine $(n+1)$-stellige Abbildung von $P = (P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ in Q, die in jeder Variablen isoton ist, und seien $u, v \in P_{n+1}$. Die n-stellige Abbildung $g\colon (P_1, \dots, P_n) \to Q$ sei durch $g(x) = f(x; u)$ definiert. Nach Induktionsvoraussetzung für g gilt dann für alle $x, y \in \prod_{i=1}^n P_i$

$$(x; u) \leq_P (y; v) \quad\Longrightarrow\quad f(x; u) = g(x) \leq_Q g(y) = f(y; u) \leq_P f(y; v). \qquad \square$$

Aus der Isotonie mehrstelliger Abbildungen entsteht nun durch $(\sigma; \tau)$-Dualisierung der beteiligten quasigeordneten Mengen der Begriff der $(\sigma; \tau)$-Monotonie.

Definition 2.1.7 ($(\sigma; \tau)$-monotone Abbildungen)**.** Sei $(P; Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen und $(\sigma; \tau) \in \{+, -\}^{n+1}$ eine Signatur. Eine n-stellige Abbildung $f\colon P \to Q$ heißt *$(\sigma; \tau)$-monoton*, falls $f\colon \prod P^\sigma \to Q^\tau$ isoton ist, d. h. falls für alle $x, y \in \prod P$ gilt:

$$x \leq_P^\sigma y \quad\Longrightarrow\quad f(x) \leq_Q^\tau f(y).$$

Nullstellige Abbildungen sind trivialerweise $(\sigma; \tau)$-monoton (wobei σ das leere Tupel ist). Zwischen quasigeordneten Mengen sind sowohl die $(+; +)$- als auch die $(-; -)$-monotonen Funktionen gerade die isotonen (gleiche Vorzeichen), und die $(+; -)$- ebenso wie die $(-; +)$-monotonen die antitonen (verschiedene Vorzeichen). Für $(\alpha; \beta) \in \{+, -\}^2$ sind somit insbesondere die Begriffe $(\alpha; \beta)$-, $(\beta; \alpha)$-, $(-\alpha; -\beta)$- und $(\beta\alpha; +)$-monoton gleichwertig.

Korollar 2.1.8. *Sei $(P;Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen und $(\sigma;\tau)$ eine Signatur. Für jede n-stellige Abbildung $f\colon P \to Q$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist $(\sigma;\tau)$-monoton.

(2) f ist für jedes $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-monoton, d. h. für alle $a \in \prod P$ und $x, y \in P_i$ gilt

$$x \leq_{P_i}^{\sigma_i} y \quad \Longrightarrow \quad f(a_1,\ldots,x,\ldots,a_n) \leq_Q^{\tau} f(a_1,\ldots,y,\ldots,a_n).$$

(3) f ist als Abbildung von P^σ in Q^τ in jeder Variablen isoton.

(4) f ist $(\tau\sigma;+)$-monoton.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (1)–(3) folgt aus Proposition 2.1.6 und geeigneter Dualisierung. Unter Verwendung von (1) $\Leftrightarrow$ (2) ergibt sich auch (2) $\Leftrightarrow$ (4), da die Eigenschaften $(\sigma_i;\tau)$-monoton und $(\tau\sigma_i;+)$-monoton gleichbedeutend sind. □

Die Isotonie von $f\colon \prod P \to Q$ lässt sich also unter anderem als $([+];+)$-Monotonie von $f\colon P \to Q$ beschreiben und die Antitonie auch als $([-];+)$-Monotonie. Wir werden im folgenden auch eine *mehrstellige* Abbildung $f\colon P \to Q$ einfach als *isoton* (bzw. *antiton*) bezeichnen, wenn sie in jeder Variablen isoton (bzw. in jeder Variablen antiton) ist.

Bemerkung 2.1.9. Aussage (4) in Korollar 2.1.8 entspricht der Beobachtung, dass für die Beschreibung einer $(\sigma;\tau)$-monotonen Abbildung f von P in Q bereits das n-Tupel $\alpha := \tau\sigma$, also die Dualisierung P^α auf der Seite von P genügt: Für die $(\sigma;\tau)$-Monotonie ist offensichtlich nur entscheidend, ob f in der i-ten Variablen jeweils isoton ($\alpha_i = +$) oder antiton ($\alpha_i = -$) ist.

Mit den Bezeichnungen $\alpha_i = \uparrow$ für Isotonie und $\alpha_i = \downarrow$ für Antitonie stimmt diese Beschreibung im Falle n-stelliger Operationen auf einer geordneten Menge mit der klassischen Definition einer *monotonen Operation vom Typ* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ aus [41] überein. Dort werden *geordnete algebraische Strukturen* als Algebren $(A,(f_i)_{i\in I})$ erklärt, deren Grundmenge A geordnet ist und deren Operationen f_i jeweils eine Monotonie-Bedingung eines gewissen Typs erfüllen, d. h. in jeder Variablen isoton oder antiton sind (oder beides). Ähnliche Strukturen treten in [23] unter dem Namen *Tonoide* auf (siehe auch [21] und [6]), wobei wie in unserem Fall die Vorzeichen-Notation $\alpha_i = +$ bzw. $\alpha_i = -$ verwendet wird. Wie dies häufiger der Fall ist, wurden dieselben Strukturen in vielen weiteren Quellen erneut erfunden, beispielsweise in [22] als *monotone Poset-Expansionen* (*MPE*) mit der Notation $\alpha_i = 1$ bzw. $\alpha_i = \partial$ (siehe auch [46]).

Inzwischen versteht man unter *geordneten Algebren* meistens nur noch solche Algebren mit geordneter Grundmenge, deren Operationen in jeder Variablen *isoton* sind (vergleiche etwa [9] oder die Darstellung in [87]). Wichtige Beispiele für geordnete Algebren sind geordnete Gruppen oder, allgemeiner, geordnete Monoide, oft auch mit zugrundeliegender Verbandsstruktur (siehe [7]).

Im Gegensatz zur erwähnten Literatur ziehen wir für die vorliegenden Zwecke die gegebene Definition einer $(\sigma;\tau)$-monotonen Abbildung ihrer alternativen Beschreibung als monotoner Funktion vom Typ $\alpha = \tau\sigma$ vor. Die $(\sigma;\tau)$-Monotonie passt vor allem nahtlos zur weiter unten eingeführten allgemeinen $(\sigma;\tau)$-Residuiertheit, zu deren Beschreibung ein n-Tupel aus Vorzeichen nicht mehr ausreicht.

$(\sigma;\tau)$	Bezeichnung für eine $(\sigma;\tau)$-Adjunktion (f,g)	Äquivalente Bedingung
$(+;+)$	*Adjunktion* (oder *residuiertes Paar*)	$x \leq g(y) \Leftrightarrow f(x) \leq y$
$(-;-)$	*duale Adjunktion* (oder *duales residuiertes Paar*)	$g(y) \leq x \Leftrightarrow y \leq f(x)$
$(+;-)$	*Galois-Verbindung*	$x \leq g(y) \Leftrightarrow y \leq f(x)$
$(-;+)$	*duale Galois-Verbindung*	$g(y) \leq x \Leftrightarrow f(x) \leq y$

Tabelle 2.1: Verwendete Bezeichnungen für $(\sigma;\tau)$-Adjunktionen

2.1.3 Einstellige $(\sigma;\tau)$-Residuiertheit

Als Vorbereitung auf den mehrstelligen Fall betrachten wir zunächst einstellige residuierte Abbildungen und ihre Varianten, die sich durch Dualisierung von Definitions- oder Zielbereich ergeben. Ebenso werden im folgenden Adjunktionen zwischen geordneten Mengen und die zugehörigen Notationen auf systematische Weise dualisiert.

Viele Autoren bezeichnen Adjunktionen auch als Galois-Verbindungen und führen neben diesen kovarianten (oder isotonen) Galois-Verbindungen gegebenenfalls noch kontravariante (oder antitone) ein. Auch für duale Adjunktionen (oder duale Galois-Verbindungen) finden sich in der Literatur viele nicht übereinstimmende Definitionen. Wir nutzen daher die Gelegenheit, eine einheitliche Terminologie einzuführen.

Definition 2.1.10 ($(\sigma;\tau)$-Adjunktionen)**.** Seien P und Q geordnete Mengen und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$. Eine $(\sigma;\tau)$-*Adjunktion* (f,g) *zwischen* P *und* Q ist eine Adjunktion zwischen P^σ und Q^τ. Wir nennen eine $(\sigma;\tau)$-Adjunktion auch ein $(\sigma;\tau)$-*adjungiertes* oder $(\sigma;\tau)$-*residuiertes Paar*.

In Tabelle 2.1 werden außerdem die im folgenden verwendeten Bezeichnungen für $(\sigma;\tau)$-Adjunktionen in den vier möglichen Fällen aufgeführt.

Ein Paar (f,g) von Abbildungen $f\colon P \to Q$ und $g\colon Q \to P$ ist nach Definition genau dann eine $(\sigma;\tau)$-Adjunktion zwischen P und Q, wenn f und g $(\sigma;\tau)$-monoton sind und

$$\mathrm{id}_P \leq^\sigma g \circ f, \qquad f \circ g \leq^\tau \mathrm{id}_Q$$

erfüllen (wobei sich die punktweise Ordnung auf P bzw. Q bezieht).

Nach Proposition 1.2.32 wird eine $(\sigma;\tau)$-Adjunktionen (f,g) zwischen geordneten Mengen P und Q auch durch die Bedingung

$$x \leq^\sigma_P g(y) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq^\tau_Q y \tag{2.1}$$

charakterisiert.

Definition 2.1.11 ($(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen und $(\sigma;\tau)$-Residuale)**.** Seien P, Q geordnete Mengen und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$. Eine Abbildung $f\colon P \to Q$ heißt $(\sigma;\tau)$-*residuiert*, wenn $f\colon P^\sigma \to Q^\tau$ residuiert ist, d. h. falls eine Abbildung $g\colon Q \to P$ existiert, so dass (f,g) eine $(\sigma;\tau)$-Adjunktion zwischen P und Q ist.

In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt und wird das $(\sigma;\tau)$-*Residual von* f genannt, geschrieben als

$$f^*_{(\sigma;\tau)}.$$

In Tabelle 2.2 sind die im folgenden verwendeten Bezeichnungen für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen aufgelistet. Insbesondere sind $(+;+)$-residuierte einfach residuierte Abbildungen

$(\sigma;\tau)$	Bezeichnung für eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung
$(+;+)$	*residuiert* (oder *co-adjungiert*)
$(-;-)$	*dual residuiert* (oder *residual*, *adjungiert*)
$(+;-)$	*Galois-verbunden* (oder *Galois-Abbildung*)
$(-;+)$	*dual Galois-verbunden* (oder *duale Galois-Abbildung*)

Tabelle 2.2: Verwendete Bezeichnungen für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen

(wobei das $(+;+)$-Residual einfach *Residual* genannt wird), und $(-;-)$-residuierte Abbildungen heißen auch *dual residuiert* oder *residual*. Die Komponenten (dualer) Galois-Verbindungen heißen (*duale*) *Galois-Abbildungen*.

Durch geeignete Dualisierung lassen sich nun alle Eigenschaften von $(\sigma;\tau)$-Adjunktionen mit $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$ auf Eigenschaften von Adjunktionen zurückführen. Wir notieren nur die folgenden: Ist f eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung von P in Q, so sind f und $f^*_{(\sigma;\tau)}$ beide $(\sigma;\tau)$-monoton, also $f^*_{(\sigma;\tau)} \circ f$ und $f \circ f^*_{(\sigma;\tau)}$ isotone Abbildungen, und es gilt

$$\mathrm{id}_P \leq^\sigma f^*_{(\sigma;\tau)} \circ f \quad \text{und} \quad f \circ f^*_{(\sigma;\tau)} \leq^\tau \mathrm{id}_Q$$

sowie $f \circ f^*_{(\sigma;\tau)} \circ f = f$ und $f^*_{(\sigma;\tau)} \circ f \circ f^*_{(\sigma;\tau)} = f^*_{(\sigma;\tau)}$. Außerdem ist

$$f^*_{(\sigma;\tau)}(y) = \max\nolimits^\sigma_P\{\, x \in P : f(x) \leq^\tau_Q y \,\}.$$

Für ein residuiertes f ist mit den früher festgelegten Bezeichnungen $f^*_{(+;+)} = f^*$, und für ein dual residuiertes g ist $g^*_{(-;-)} = g^*_{(+;+)^{-1}} = g_*$ (siehe Definition 1.2.31).

Eine Abbildung $f\colon L \to M$ zwischen vollständigen Verbänden ist nach Proposition 1.2.35 genau dann $(\sigma;\tau)$-residuiert, wenn $f\colon L^\sigma \to M^\tau$ $\bigvee$-erhaltend ist. Oder gleichbedeutend:

$$f(\textstyle\bigvee^\sigma_L A) = \bigvee^\tau_M f[A] \quad \text{für alle } A \subseteq L.$$

Für $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$ ist $(\sigma;\tau)^{-1} = (-\tau;-\sigma)$. Durch einen Blick auf die vier möglichen Fälle ergibt sich damit das nächste Lemma zur Residuiertheit des Residuals einer $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildung.

Lemma 2.1.12. *Sei $f\colon P \to Q$ eine Abbildung zwischen geordneten Mengen und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$. Ist f $(\sigma;\tau)$-residuiert, so ist das $(\sigma;\tau)$-Residual $f^*_{(\sigma;\tau)}$ $(\sigma;\tau)^{-1}$-residuiert, und es gilt*

$$\big(f^*_{(\sigma;\tau)}\big)^*_{(\sigma;\tau)^{-1}} = f.$$

Beweis. (f,g) ist genau dann eine $(\sigma;\tau)$-Adjunktion zwischen P und Q, wenn (g,f) eine $(\sigma;\tau)^{-1}$-Adjunktion zwischen Q und P ist. □

Jeder Ordnungsisomorphismus f ist $(+;+)$- und $(-;-)$-residuiert (d. h. residuiert und dual residuiert) mit $f^*_{(+;+)} = f^*_{(-;-)} = f^{-1}$. Jeder duale Ordnungsisomorphismus g ist $(+;-)$- und $(-;+)$-residuiert (d. h. eine Galois-Abbildung und eine duale Galois-Abbildung) mit $g^*_{(+;-)} = g^*_{(-;+)} = g^{-1}$.

Zur Verknüpfung $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen können wir feststellen:

Lemma 2.1.13. *Seien P, P', P'' geordnete Mengen und $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \{+,-\}$ Vorzeichen. Ist $f\colon P \to P'$ $(\sigma;\sigma')$-residuiert und $g\colon P' \to P''$ $(\sigma';\sigma'')$-residuiert, so ist $g \circ f\colon P \to P''$ eine $(\sigma;\sigma'')$-residuierte Abbildung mit*

$$(g \circ f)^*_{(\sigma;\sigma'')} = f^*_{(\sigma;\sigma')} \circ g^*_{(\sigma';\sigma'')}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt mit geeigneter Dualisierung aus der Komposition adjungierter Paare. □

Abschließend betrachten wir noch geordnete Mengen $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen.

Definition 2.1.14 (Geordnete Mengen $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen)**.** Seien P, Q geordnete Mengen. Die punktweise geordnete Menge aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen von P in Q wird mit $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(P;Q)$ bezeichnet. Es ist $\mathsf{res}_{(+;+)}(P;Q) = \mathsf{res}(P;Q)$.

Proposition 2.1.15. *Seien P, Q geordnete Mengen und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$. Die Abbildung $f \mapsto f^*_{(\sigma;\tau)}$, die jedem $(\sigma;\tau)$-residuierten $f\colon P \to Q$ das $(\sigma;\tau)$-Residual $f^*_{(\sigma;\tau)}\colon Q \to P$ zuordnet, ist ein Isomorphismus zwischen den geordneten Mengen*

- $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(P;Q)^\tau$ *aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen von P in Q und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)^{-1}}(Q;P)^{-\sigma}$ *aller $(\sigma;\tau)^{-1}$-residuierten Abbildungen von Q in P*

mit der Inversen $g \mapsto g^*_{(\sigma;\tau)^{-1}}$.

Beweis. Nach Lemma 2.1.12 ist nur noch zu zeigen, dass die Abbildung $f \mapsto f^*_{(\sigma;\tau)}$ von $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(P;Q)$ in $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)^{-1}}(Q;P)$ $(\tau;-\sigma)$-monoton ist, d. h. dass für alle $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen $f, h\colon P \to Q$ gilt:

$$h \le^\tau f \quad \Longrightarrow \quad f^*_{(\sigma;\tau)} \le^\sigma h^*_{(\sigma;\tau)}$$

(damit ist die Inverse $g \mapsto g^*_{(\sigma;\tau)^{-1}}$ eine $(-\sigma;\tau)$-, also auch $(\tau;-\sigma)$-monotone Abbildung).

Seien also $f, h\colon P \to Q$ $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen. Dann gilt insbesondere $f \circ f^*_{(\sigma;\tau)} \le^\tau \mathrm{id}_Q$ und $\mathrm{id}_P \le^\sigma h^*_{(\sigma;\tau)} \circ h$, außerdem ist $h^*_{(\sigma;\tau)}$ $(\tau;\sigma)$-monoton. Aus $h \le^\tau f$ folgt nun

$$h \circ f^*_{(\sigma;\tau)} \le^\tau f \circ f^*_{(\sigma;\tau)} \le^\tau \mathrm{id}_Q,$$

also $f^*_{(\sigma;\tau)} = \mathrm{id}_P \circ f^*_{(\sigma;\tau)} \le^\sigma h^*_{(\sigma;\tau)} \circ h \circ f^*_{(\sigma;\tau)} \le^\sigma h^*_{(\sigma;\tau)} \circ \mathrm{id}_Q = h^*_{(\sigma;\tau)}$. □

Nach dieser Feststellung sind die geordneten Mengen $\mathsf{res}(P;Q)$ und $\mathsf{res}_{(-;-)}(Q;P)$ dual isomorph; hingegen sind die geordneten Mengen $\mathsf{res}_{(+;-)}(P;Q)$ und $\mathsf{res}_{(+;-)}(Q;P)$ isomorph, und ebenso sind $\mathsf{res}_{(-;+)}(P;Q)$ und $\mathsf{res}_{(-;+)}(Q;P)$ isomorph.

2.2 Allgemeine $(\sigma;\tau)$-Residuiertheit

Die Residuiertheit mehrstelliger Operationen (als Residuiertheit in jeder Koordinate) ist im Rahmen *residuierter algebraischer Strukturen* wohlbekannt. Wir skizzieren kurz die übliche Behandlung des wichtigsten Falls einer zweistelligen Operation, der sich analog auf n-stellige Operationen übertragen lässt.

Sei P eine geordnete Menge und $\circ$ eine binäre Operation auf P. Man nennt die zweistellige Funktion $\circ$ *residuiert* und in diesem Fall $(P,\circ)$ ein *residuiertes Gruppoid*, wenn die einstelligen *Translationen*

$$l_y\colon x \mapsto x\circ y \quad (y\in P) \quad \text{und} \quad r_x\colon y\mapsto x\circ y \quad (x\in P) \tag{2.2}$$

auf P im bisherigen Sinne residuiert sind. Äquivalent hierzu ist die Existenz zweier (eindeutig bestimmter) binärer Operationen $\leftarrow$ und $\rightarrow$ auf P, so dass die folgende *Residuiertheitsbedingung* gilt:

$$\begin{aligned} x\circ y\leq z \quad &\Longleftrightarrow \quad x\leq z\leftarrow y\\ &\Longleftrightarrow \quad y\leq x\rightarrow z. \end{aligned}$$

Dies ergibt sich leicht mit $z\leftarrow y = l_y^*(z)$ und $x\rightarrow z = r_x^*(z)$ aus den bekannten Resultaten für einstellige residuierte Abbildungen. Die Operationen $\leftarrow$ und $\rightarrow$ werden *linkes* bzw. *rechtes Residual* von $\circ$ genannt. Die Schreibweisen und Bezeichnungen für diese Residuale weichen in der Literatur zum Teil erheblich voneinander ab; beispielsweise werden die Residuale einer als Multiplikation geschriebenen Verknüpfung $\cdot$ oft mit / bzw. \ bezeichnet (oder umgekehrt). Eine klassische Quelle für residuierte algebraische Strukturen ist [11].

In algebraischen Modellen der Logik wird die Ordnung $\leq$ von P als logische Folgerung interpretiert. Die Operation $\circ$ wird in diesem Fall auch *Fusion* genannt, und $\leftarrow$ bzw. $\rightarrow$ heißen dann linke bzw. rechte *Implikation* (siehe etwa [80] oder [42]). Die Fusion modelliert dabei eine *intensionale* (oder *multiplikative*) *Konjunktion* in Verallgemeinerung der *extensionalen* (oder *additiven*) Konjunktion, welche algebraisch durch das binäre Infimum beschrieben wird. Zusammen nennt man $(\circ,\leftarrow,\rightarrow)$ eine *residuierte Familie.*

Eine systematische Untersuchung allgemeiner residuierter Familien findet im Rahmen von Dunns *Gaggle-Theorie* statt, siehe [20, 21], [23] und [6]. Einige der im folgenden eingeführten Begriffe im Zusammenhang mit residuierten Familien sind entsprechend stark an die Terminologie von Dunn angelehnt. An anderen Stellen gehen wir allerdings deutlich über die vorhandene Theorie hinaus. So gibt es in der Literatur zur Gaggle-Theorie zum Beispiel keinen verallgemeinerten Begriff des Residuals. Die Eigenschaften und Darstellungen allgemeiner Residuale spielen im Laufe dieser Arbeit hingegen eine zentrale Rolle.

2.2.1 Residuierte Familien

Für den gesamten Rest des Abschnitts sei – sofern nichts anderes festgelegt wird – stets $(P;Q) = (P_1,\dots,P_n;Q)$ eine Familie geordneter Mengen und $(\sigma;\tau)\in\{+,-\}^{n+1}$ eine Signatur.

Definition 2.2.1 ($(\sigma;\tau)$-residuierte Familien)**.** Eine $(\sigma;\tau)$-*residuierte Familie*

$$(f,g_1,\dots,g_n)$$

über P_1, …, P_n *und* Q (oder kurz: *über* $(P;Q)$) besteht aus n-stelligen Abbildungen

$$f\colon P\to Q \quad \text{und} \quad g_i\colon P[i\mapsto Q]\to P_i \quad (i\in \underline{n}),$$

so dass die folgende *Residuiertheitsbedingung* erfüllt ist: Für alle $i\in\underline{n}$ und alle $(x;y)\in\prod P\times Q$ gilt

$$x_i \leq^{\sigma_i}_{P_i} g_i(x_1,\dots,y,\dots,x_n) \quad\Longleftrightarrow\quad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\leq^{\tau}_{Q} y. \tag{2.3}$$

Die Abbildung f heißt der *Kopf* der Familie $(f,g_1,\dots,g_n)$. Eine $([+];+)$-residuierte Familie wird auch einfach *residuierte Familie* genannt.

Nach dieser Definition ist also das eingangs erwähnte Tripel $(\circ, \leftarrow, \rightarrow)$ eine residuierte Familie. Im Fall $n = 1$ ist eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie offensichtlich dasselbe wie ein $(\sigma;\tau)$-residuiertes Paar (eine $(\sigma;\tau)$-Adjunktion), siehe (2.1) auf Seite 28.

In Verallgemeinerung von Proposition 1.2.35 (residuierte Abbildungen sind genau die co-adjungierten) definieren wir die Residuiertheit mehrstelliger Abbildungen nun mittels residuierter Familien:

Definition 2.2.2 ($(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen)**.** Eine n-stellige Abbildung $f\colon P \to Q$ heißt $(\sigma;\tau)$-*residuiert*, wenn es Abbildungen $g_1, \ldots, g_n$ gibt, so dass $(f, g_1, \ldots, g_n)$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie über $P_1, \ldots, P_n$ und Q ist.

Eine $([+];+)$-residuierte Abbildung $f\colon P \to Q$ nennen wir auch schlicht *residuiert*.

Die Residuiertheit einer n-stelligen Funktion $f\colon P \to Q$ ist im allgemeinen *nicht* dasselbe wie ihre Residuiertheit als einstellige Funktion $f\colon \prod P \to Q$, siehe dazu später das Beispiel 2.2.25! Es muss also sorgfältig zwischen f als einstelliger und als mehrstelliger Abbildung unterschieden werden. Trotzdem werden die Bezeichnungen im folgenden wie in der Literatur recht großzügig gehandhabt, sofern keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Konvention 2.2.3 ($(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen)**.** Wir nennen gelegentlich auch eine *einstellige* Funktion $f\colon \prod P \to Q$ $(\sigma;\tau)$-*residuiert*, wenn sie als mehrstellige Abbildung von P in Q $(\sigma;\tau)$-residuiert ist (wobei aber stets eine gegebene Zerlegung des Produkts $\prod P$ in die Faktoren $P_1, \ldots, P_n$ vorausgesetzt wird). Analoges gelte für die $(\sigma;\tau)$-Monotonie.

Manchmal sprechen wir auch von der *mehrstelligen* Abbildung $f\colon \prod P \to Q$, wenn eigentlich $f\colon P \to Q$ gemeint ist. Demzufolge bedeutet die Residuiertheit der mehrstelligen Abbildung $f\colon \prod P \to Q$ also, dass f koordinatenweise residuiert ist (und nicht, dass f als einstellige Funktion residuiert ist).

Die nächste Proposition stellt die wichtige Verbindung von mehrstelliger und einstelliger Residuiertheit her und ist die Grundlage für die spätere Definition des i-ten Residuals.

Proposition 2.2.4. *Sei $f\colon P \to Q$ eine n-stellige Abbildung und $i \in \underline{n}$. Die Abbildung f ist genau dann in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert, wenn es eine n-stellige Abbildung $g\colon P[i \mapsto Q] \to P_i$ gibt, so dass (f_i^a, g_i^a) für alle $a \in \prod P$ eine $(\sigma_i;\tau)$-Adjunktion zwischen P_i und Q ist, d. h.*

$$x \leq_{P_i}^{\sigma_i} g(a_1, \ldots, y, \ldots, a_n) \iff f(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n) \leq_Q^{\tau} y \tag{2.4}$$

für alle $x \in P_i$, $y \in Q$ gilt. In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt durch

$$g(a_1, \ldots, y, \ldots, a_n) = g_i^a(y) = (f_i^a)^*_{(\sigma_i;\tau)}(y) \qquad (a \in \textstyle\prod P,\ y \in Q).$$

Beweis. f ist genau dann in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert, wenn für alle $a \in \prod P$ die einstellige Abbildung f_i^a $(\sigma_i;\tau)$-residuiert ist. Mit

$$g(a[i \mapsto y]) := (f_i^a)^*_{(\sigma_i;\tau)}(y)$$

folgt die Behauptung somit aus den Eigenschaften von $(\sigma_i;\tau)$-Adjunktionen. □

Damit ergibt sich die erwartete Charakterisierung der Residuiertheit mehrstelliger Abbildungen als Residuiertheit in jeder Koordinate.

Korollar 2.2.5. *Sei f eine n-stellige Abbildung von P in Q. Es sind äquivalent:*

(1) f ist $(\sigma;\tau)$-residuiert, d. h. es gibt Abbildungen $g_1, \ldots, g_n$, so dass $(f, g_1, \ldots, g_n)$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie über $P_1, \ldots, P_n$ und Q ist.

(2) f ist für jedes $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert.

(3) f ist als Abbildung von P^σ in Q^τ residuiert (d. h. Kopf einer residuierten Familie).

(4) f ist als Abbildung von P^σ in Q^τ in jeder Variablen residuiert.

Darüber hinaus sind die Abbildungen $g_1, \ldots, g_n$ in Aussage (1) eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) und die Eindeutigkeit der g_i folgen aus der Definition $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen, indem Proposition 2.2.4 auf jede Koordinate von f angewendet wird (vergleiche dafür die Residuiertheitsbedingung (2.3) mit (2.4)). (1) $\Leftrightarrow$ (3) und (2) $\Leftrightarrow$ (4) sind klar. □

Der etwas redundante Begriff der $(\sigma;\tau)$-Monotonie wird nun gerechtfertigt durch:

Lemma 2.2.6. *Jede $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung ist auch $(\sigma;\tau)$-monoton.*

Beweis. Eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung ist für jedes $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert und somit $(\sigma_i;\tau)$-monoton. Mit Korollar 2.1.8 ergibt sich die Behauptung. □

Bevor wir uns den allgemeinen Residualen zuwenden, betrachten wir noch $\bigvee$-Erzeuger im Zusammenhang mit mehrstelligen residuierten Abbildungen.

Definition 2.2.7 (σ-Erzeuger)**.** Sei $P = (P_1, \ldots, P_n)$ eine Familie von quasigeordneten Mengen und $\sigma \in \{+,-\}^n$. Eine Familie $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von Teilmengen $B_i \subseteq P_i$ heißt *σ-dicht* in P (oder *σ-Erzeuger* von P), falls für jedes $i \in \underline{n}$ die Menge B_i $\bigvee^{\sigma_i}$-dicht in P_i (d. h. ein $\bigvee$-Erzeuger von $P_i^{\sigma_i}$) ist.

Proposition 2.2.8. *Sei $B = (B_1, \ldots, B_n)$ ein σ-Erzeuger von P, und seien $f, g\colon P \to Q$ $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen.*

Aus $f \restriction B \leq g \restriction B$ folgt bereits $f \leq g$. Sind also die n-stelligen Abbildungen f und g auf $B = (B_1, \ldots, B_n)$ identisch, so ist $f = g$.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion über die Stellenzahl n der Abbildungen f und g. Der Induktionsanfang gilt für $n = 0$ trivialerweise und für $n = 1$ nach Proposition 1.2.36.

Sei nun $\sigma \in \{+,-\}^{n+1}$, die $(n+1)$-stelligen Funktionen $f, g\colon P \to Q$ seien $(\sigma;\tau)$-residuiert, B σ-dicht in P und $f \restriction B \leq g \restriction B$. Sei $x \in \prod P$. Für jedes $b \in B_{n+1}$ sind dann die durch

$$\begin{aligned} f_b(x_1, \ldots, x_n) &= f^x_{n+1}(b) = f(x_1, \ldots, x_n, b), \\ g_b(x_1, \ldots, x_n) &= g^x_{n+1}(b) = g(x_1, \ldots, x_n, b) \end{aligned}$$

definierten n-stelligen Abbildungen $f_b, g_b\colon (P_1, \ldots, P_n) \to Q$ $(\sigma;\tau)$-residuiert mit

$$f_b \restriction (B_1, \ldots, B_n) \leq g_b \restriction (B_1, \ldots, B_n),$$

und $(B_1, \ldots, B_n)$ ist $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$-dicht in $(P_1, \ldots, P_n)$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $f_b \leq g_b$. Somit gilt $f^x_{n+1} \restriction B_{n+1} \leq g^x_{n+1} \restriction B_{n+1}$ für die σ_{n+1}-dichte Teilmenge B_{n+1} von P_{n+1}, nach Proposition 1.2.36 also $f^x_{n+1} \leq g^x_{n+1}$. Insgesamt ergibt sich damit $f \leq g$. □

2.2.2 Verallgemeinerte Residuale

Eine n-stellige residuierte Abbildung besitzt n Residuale. Für diese führen wir zunächst eine geeignete Notation ein und zeigen dann die wichtigsten Eigenschaften solcher allgemeinen Residuale.

Definition 2.2.9 (($\sigma;\tau$)-Residuale)**.** Sei $f\colon P \to Q$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung. Dann gibt es nach Korollar 2.2.5 eindeutig bestimmte Funktionen $g_1, \ldots, g_n$, so dass $(f, g_1, \ldots, g_n)$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie ist.

Für jedes $i \in \underline{n}$ wird g_i das *i-te $(\sigma;\tau)$-Residual von f* genannt (oder kürzer auch *i-tes Residual* von f, sofern der Bezug auf die Signatur $(\sigma;\tau)$ klar ist). Wir bezeichnen das i-te $(\sigma;\tau)$-Residual $g_i\colon P[i \mapsto Q] \to P_i$ mit

$$f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$$

und notieren f auch als $f^{(0)}_{(\sigma;\tau)}$. Ist f eine $([+];+)$-residuierte Abbildung, so schreiben wir meistens $f^{(i)}$ anstelle von $f^{(i)}_{([+];+)}$.

Wegen der Eindeutigkeit der Residuale ist

$$f \mapsto (f, f^{(1)}_{(\sigma;\tau)}, \ldots, f^{(n)}_{(\sigma;\tau)})$$

eine Bijektion zwischen der Menge aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen von $P_1, \ldots, P_n$ in Q und der Menge aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien über $P_1, \ldots, P_n$ und Q.

Ist $n = 1$ und $f\colon P \to Q$ eine einstellige $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung, so ist $f^{(1)}_{(\sigma;\tau)}$ dasselbe wie $f^*_{(\sigma;\tau)}$. Im Fall $n = 0$ ergibt sich aus Definition 2.2.2, dass jede Abbildung $\mathbf{1} \to Q$ (d. h. jedes Element von Q) $(\sigma;\tau)$-residuiert ist.

Mit den Bezeichnungen für Residuale erhalten wir sofort die folgende wichtige Beziehung zwischen dem i-ten Residual einer mehrstelligen und dem gewöhnlichen Residual geeigneter einstelliger Abbildungen.

Korollar 2.2.10. *Sei $f\colon P \to Q$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung und $i \in \underline{n}$. Dann ist für jedes $a \in \prod P$*

$$\big(f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}\big)^a_i = (f^a_i)^*_{(\sigma_i;\tau)}.$$

Außerdem gilt für alle $(x;y) \in \prod P \times Q$

$$x_i \leq^{\sigma_i} f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) \quad\iff\quad f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \leq^{\tau} y.$$

Beweis. Nach Definition des i-ten Residuals und Proposition 2.2.4. □

Das folgende Beispiel für zweistellige residuierte Abbildungen und ihre Residuale ist bereits vom Beginn des Abschnitts bekannt. Danach betrachten wir eine duale Variante.

Beispiel 2.2.11. Sei P eine geordnete Menge. Die oben erwähnte Fusion-Implikationen-Familie $(\circ, \leftarrow, \rightarrow)$ mit

$$x_1 \circ x_2 \leq y \quad\iff\quad x_1 \leq y \leftarrow x_2 \quad\iff\quad x_2 \leq x_1 \rightarrow y \tag{2.5}$$

für alle $x_1, x_2, y \in P$ ist eine $(+,+;+)$-residuierte (oder einfach residuierte) Familie auf P. Der residuierte Kopf der Familie ist $\circ$, und seine beiden Residuale sind

$$\leftarrow \,=\, \circ^{(1)} \quad\text{und}\quad \rightarrow \,=\, \circ^{(2)}.$$

Nach Lemma 2.2.6 ist die binäre Operation $\circ$ insbesondere isoton (in jeder Koordinate).

Beispiel 2.2.12. Sei P eine geordnete Menge und $(\oplus, \oslash, \oslash)$ eine $(-,-;-)$-residuierte Familie auf P, d. h. für alle $x_1, x_2, y \in P$ gelte

$$y \leq x_1 \oplus x_2 \iff y \oslash x_2 \leq x_1 \iff x_1 \oslash y \leq x_2.$$

In Zusammenhängen der Logik wird $\oplus$ auch *Fission* genannt, und $\oslash$ und $\oslash$ heißen linke bzw. rechte *Differenz*. Dual zu $(+,+;+)$-residuierten Fusion-Operationen $\circ$ wird durch eine $(-,-;-)$-residuierte Operation $\oplus$ eine *intensionale* (oder *multiplikative*) *Disjunktion* algebraisch modelliert. Der Kopf $\oplus$ der Fission-Differenzen-Familie ist in beiden Variablen dual residuiert und damit insbesondere isoton.

Als extensionalen Spezialfall von $\oplus$ betrachten wir die binäre Vereinigung $\cup$ auf einem Potenzmengenverband $\mathfrak{P}X$. Diese ist $(-,-;-)$-residuiert, und das erste $(-,-;-)$-Residual von $\cup$ ist gerade die mengentheoretische Differenz, denn es gilt

$$B \subseteq A_1 \cup A_2 \iff B \setminus A_2 \subseteq A_1 \iff B \setminus A_1 \subseteq A_2$$

für alle $A_1, A_2, B \subseteq X$.

Die Residuiertheit einer mehrstelligen Abbildung (in jeder Variablen) hat zur Folge, dass auch sämtliche ihrer Residuale bezüglich einer gewissen Signatur residuiert sind. Im nächsten Theorem wird darüber hinaus gezeigt, wie dann die Residuale dieser Residuale gebildet werden. Für seine Formulierung erinnern wir an die nützliche Notation $(\sigma;\tau)^{-i}$ der i-ten konversen Signatur von $(\sigma;\tau)$ (siehe Definition 2.1.3).

Theorem 2.2.13 (Residuale einer residuierten Abbildung)**.** *Sei $f\colon P \to Q$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung. Dann ist für alle $i \in \underline{n}$ das i-te $(\sigma;\tau)$-Residual $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ eine $(\sigma;\tau)^{-i}$-residuierte Abbildung von $P[i \mapsto Q]$ in P_i.*

Außerdem ist das i-te Residual des i-ten Residuals von f wieder f, also

$$(f^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)^{-i}} = f,$$

und im Fall $k \in \underline{n}$ mit $k \neq i$ gilt für alle $z \in \prod P[i \mapsto Q][k \mapsto P_i]$

$$(f^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^{(k)}_{(\sigma;\tau)^{-i}}(z) = f^{(k)}_{(\sigma;\tau)}(z[i \mapsto z_k][k \mapsto z_i]),$$

d. h. das k-te Residual des i-ten Residuals von f entsteht aus dem k-ten Residual von f durch Vertauschen der i-ten und k-ten Variablen.

Beweis. Nach Voraussetzung ist f für $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert, und für alle $a \in \prod P$ ist

$$((f^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^a_i, f^a_i) \tag{2.6}$$

nach Korollar 2.2.10 und Lemma 2.1.12 eine $(\sigma_i;\tau)^{-1}$-Adjunktion, also $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ in der i-ten Variablen $(-\tau;-\sigma_i)$-residuiert.

Für $k \in \underline{n}$ mit $k \neq i$ ist $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ in der k-ten Variablen $(\sigma_k;-\sigma_i)$-residuiert, denn nach Voraussetzung gilt für alle $(x;y) \in \prod P \times Q$ und $l \in \underline{n}$

$$x_l \leq^{\sigma_l} f^{(l)}_{(\sigma;\tau)}(x_1,\dots,x_{l-1},y,x_{l+1},\dots,x_n) \iff f(x_1,\dots,x_l,\dots,x_n) \leq^{\tau} y$$

und somit

$$\begin{aligned} & x_k \leq^{\sigma_k} f^{(k)}_{(\sigma;\tau)}(x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n) = (f^{(k)}_{(\sigma;\tau)})^{x[k\mapsto y]}_i(x_i) \\ \iff & f(x_1,\dots,x_n) \leq^\tau y \\ \iff & x_i \leq^{\sigma_i} f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n) = (f^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^{x[i\mapsto y]}_k(x_k), \end{aligned}$$

d. h.

$$((f^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^{x[i\mapsto y]}_k, (f^{(k)}_{(\sigma;\tau)})^{x[k\mapsto y]}_i)$$

ist eine $(\sigma_k; -\sigma_i)$-Adjunktion. Für die n-stellige Abbildung $g\colon P[i \mapsto Q][k \mapsto P_i] \to P_k$ mit

$$g(z) := f^{(k)}_{(\sigma;\tau)}(z[i \mapsto z_k][k \mapsto z_i])$$

ist $g^{x[i\mapsto y]}_k(z_k) = g(x[i \mapsto y][k \mapsto z_k]) = f^{(k)}_{(\sigma;\tau)}(x[i \mapsto z_k][k \mapsto y]) = (f^{(k)}_{(\sigma;\tau)})^{x[k\mapsto y]}_i(z_k)$ und somit auch

$$((f^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^{x[i\mapsto y]}_k, g^{x[i\mapsto y]}_k) \tag{2.7}$$

eine $(\sigma_k; -\sigma_i)$-Adjunktion für alle $x[i \mapsto y] \in \prod P[i \mapsto Q]$.

Insgesamt ist $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ somit $(\sigma;\tau)^{-i}$-residuiert, und aus (2.6) und (2.7) ergeben sich die angegebenen $(\sigma;\tau)^{-i}$-Residuale von $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$. □

Ist f $(\sigma;\tau)$-residuiert, so ist das i-te Residual $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ also insbesondere $(\sigma;\tau)^{-i}$-monoton (siehe Lemma 2.2.6), d. h. in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-monoton und für $k \neq i$ in der k-ten Variablen $(\sigma_k; -\sigma_i)$-monoton.

Korollar 2.2.14. *Es sei f eine n-stellige Abbildung von P in Q, und für jedes $i \in \underline{n}$ sei g_i eine n-stellige Funktion von $P[i \mapsto Q]$ in P_i. Für alle $k \in \underline{n} \setminus \{i\}$ entstehe die n-stellige Abbildung $g_{k,i}$ aus g_k durch Vertauschen der i-ten und k-ten Variablen, also*

$$g_{k,i}(z) = g_k(z[i \mapsto z_k][k \mapsto z_i]).$$

Für jedes $i \in \underline{n}$ gilt damit: $(f, g_1, \dots, g_n)$ ist genau dann eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie über $P_1, \dots, P_n$ und Q, wenn

$$(g_i, g_{1,i}, \dots, f, \dots, g_{n,i})$$

eine $(\sigma;\tau)^{-i}$-residuierte Familie über $P_1, \dots, Q, \dots, P_n$ und P_i ist.

Beweis. Für jede $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie $(f, g_1, \dots, g_n)$ und jedes $i \in \underline{n}$ ist $g_i = f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$. Die Behauptung folgt somit aus Theorem 2.2.13. □

Wir illustrieren die obigen Resultate zu residuierten Familien und Residualen an einer Fusion-Implikationen-Familie.

Beispiel 2.2.15. Wie in Beispiel 2.2.11 sei $(\circ, \leftarrow, \rightarrow)$ eine residuierte Familie auf einer geordneten Menge P. Der Kopf $\circ$ dieser Familie ist nach Definition $(+,+;+)$-residuiert. Wegen $(+,+;+)^{-1} = (-,+;-)$ und $(+,+;+)^{-2} = (+,-;-)$ gilt außerdem: Das erste Residual $\leftarrow = \circ^{(1)}$ ist $(-,+;-)$-residuiert, und das zweite Residual $\rightarrow = \circ^{(2)}$ ist $(+,-;-)$-residuiert. Damit lassen sich mühelos alle Monotonie-Eigenschaften der beteiligten Operationen ablesen.

Beispielsweise ist $\leftarrow$ in der ersten Variablen $(-;-)$-monoton (isoton) und in der zweiten Variablen $(+;-)$-monoton (antiton). Weiter ist

$$\begin{aligned}
\cdot \leftarrow x_2 &= (\leftarrow)_1^{(x_1,x_2)} = (\circ^{(1)})_1^{(x_1,x_2)} = (\circ_1^{(x_1,x_2)})^* = (\,\cdot\, \circ x_2)^*,\\
x_1 \leftarrow \cdot &= (\leftarrow)_2^{(x_1,x_2)} = (\circ^{(2)})_2^{(x_1,x_2)} = (\circ_2^{(x_1,x_2)})^* = (x_1 \circ \,\cdot\,)^*,
\end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen für die Translationen vom Beginn des Abschnitts (siehe (2.2) auf Seite 31) also wie dort beschrieben $\cdot \leftarrow x_2 = l_{x_2}^*$ und $x_1 \rightarrow \cdot = r_{x_1}^*$.

Entstehen die Operationen $\looparrowleft$ und $\looparrowright$ aus $\rightarrow$ bzw. $\leftarrow$ durch Vertauschen der Variablen, d. h. ist $x_1 \looparrowleft y = y \rightarrow x_1$ und $y \looparrowright x_2 = x_2 \leftarrow y$, so ist nach Korollar 2.2.14

- $(\leftarrow, \circ, \looparrowleft)$ eine $(-,+;-)$-residuierte Familie mit dem Kopf $\leftarrow$ und
- $(\rightarrow, \looparrowright, \circ)$ eine $(+,-;-)$-residuierte Familie mit dem Kopf $\rightarrow$.

Dies sieht man auch leicht direkt, denn zur Residuiertheitsbedingung (2.5) für $(\circ, \leftarrow, \rightarrow)$ ist sowohl äquivalent, dass für alle $x_1, x_2, y \in P$

$$x_1 \leftarrow x_2 \geq y \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 \geq y \circ x_2 \quad\Longleftrightarrow\quad x_2 \leq x_1 \looparrowleft y$$

gilt, als auch, dass für alle $x_1, x_2, y \in P$

$$x_1 \rightarrow x_2 \geq y \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 \leq y \looparrowright x_2 \quad\Longleftrightarrow\quad x_2 \geq x_1 \circ y$$

erfüllt ist. Insbesondere ist

$$\leftarrow^{(1)}_{(-,+;-)} = \left(\circ^{(1)}_{(+,+;+)}\right)^{(1)}_{(+,+;+)^{-1}} = \circ = \left(\circ^{(2)}_{(+,+;+)}\right)^{(2)}_{(+,+;+)^{-2}} = \rightarrow^{(2)}_{(+,-;-)}.$$

Beispiel 2.2.16. Sei P ein $\wedge$-Halbverband. Gibt es eine residuierte Familie $(\circ, \leftarrow, \rightarrow)$ über P, deren Kopf $\circ$ die Infimum-Operation $\wedge_P$ von P ist (aus Sicht der Logik also der extensionalen Konjunktion entspricht), so heißt P *relativ pseudokomplementär*. In diesem Fall wird auch $\supset$ für das Residual $\rightarrow$ geschrieben und $x \supset z$ das *Pseudokomplement von x relativ zu z* genannt. Wegen der Kommutativität des Infimums ist

$$x \supset z = x \rightarrow z = z \leftarrow x,$$

außerdem genügt als Bedingung für die Residuiertheit von $\wedge$ bereits

$$x \wedge y \leq z \quad\Longleftrightarrow\quad y \leq x \supset z. \tag{2.8}$$

Ein relativ pseudokomplementärer Verband P mit kleinstem Element $\bot_P$ ist ein *Heyting-Verband* (eine *Heyting-Algebra*), der dann auch ein größtes Element $\top_P = \bot \supset \bot$ besitzt. In einer Heyting-Algebra P erhält man durch

$$\neg x := x \supset \bot$$

ein *Pseudokomplement* $\neg_P$ auf P. Heyting-Algebren sind die algebraischen Modelle der intuitionistischen Aussagenlogik.

Das Konditional $\supset$ ist $(+,-;-)$-residuiert, in der ersten Koordinate also $(+;-)$-residuiert (eine Galois-Abbildung). Mit (2.8) sieht man außerdem, dass das $(+;-)$-Residual von $\cdot \supset z$ wieder $\cdot \supset z$ ist. Insbesondere ist demnach $(\neg, \neg)$ eine $(+;-)$-residuierte Familie (eine Galois-Verbindung) über P. Gilt darüber hinaus $\neg\neg x \leq x$, so ist P bereits ein *Boolescher Verband* mit dem Komplement $\neg$.

Für die Modellierung allgemeinerer Negationen betrachtet man auch beliebige Galois-Verbindungen $(\sim, -)$ auf geordneten Mengen.

Für die meisten Anwendungen residuierter Abbildungen ist neben dem einstelligen Fall der zweistellige am wichtigsten. Deshalb werden im nächsten Korollar einige zentrale Eigenschaften zweistelliger $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen zusammengefasst.

Korollar 2.2.17. *Seien P_1, P_2, Q geordnete Mengen, $(\sigma_1,\sigma_2;\tau) \in \{+,-\}^3$ und (f,g_1,g_2) eine $(\sigma_1,\sigma_2;\tau)$-residuierte Familie über P_1, P_2 und Q. Das heißt, die Abbildungen*

$$f\colon (P_1,P_2) \to Q, \quad g_1\colon (Q,P_2) \to P_1, \quad g_2\colon (P_1,Q) \to P_2$$

erfüllen für alle $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$, $y \in Q$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) \leq^{\tau} y \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq^{\sigma_1} g_1(y,x_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad x_2 \leq^{\sigma_2} g_2(x_1,y). \end{aligned}$$

f ist dann eine $(\sigma_1,\sigma_2;\tau)$-residuierte Abbildung, g_1 eine $(-\tau,\sigma_2;-\sigma_1)$-residuierte und g_2 eine $(\sigma_1,-\tau;-\sigma_2)$-residuierte mit $g_1 = f^{(1)}_{(\sigma_1,\sigma_2;\tau)}$ und $g_2 = f^{(2)}_{(\sigma_1,\sigma_2;\tau)}$. Demnach ist

$$\begin{aligned} g_1(y,x_2) &= \big(f_1^{(x_1,x_2)}\big)^*_{(\sigma_1;\tau)}(y) = \max\nolimits^{\sigma_1}\{\, x_1 \in P_1 : f(x_1,x_2) \leq^{\tau} y \,\}, \\ g_2(x_1,y) &= \big(f_2^{(x_1,x_2)}\big)^*_{(\sigma_2;\tau)}(y) = \max\nolimits^{\sigma_2}\{\, x_2 \in P_2 : f(x_1,x_2) \leq^{\tau} y \,\}. \end{aligned}$$

Außerdem gelten die folgenden Ungleichungen und Gleichungen:

(a)	$f\big(g_1(y,x_2),x_2\big) \leq^{\tau} y$	*(a')*	$f\big(x_1,g_2(x_1,y)\big) \leq^{\tau} y$
(b)	$x_1 \leq^{\sigma_1} g_1\big(f(x_1,x_2),x_2\big)$	*(b')*	$x_2 \leq^{\sigma_2} g_2\big(x_1,f(x_1,x_2)\big)$
(c)	$f\big(g_1(f(x_1,x_2),x_2),x_2\big) = f(x_1,x_2)$	*(c')*	$f\big(x_1,g_2(x_1,f(x_1,x_2))\big) = f(x_1,x_2)$
(d)	$g_1\big(f(g_1(y,x_2),x_2),x_2\big) = g_1(y,x_2)$	*(d')*	$g_2\big(x_1,f(x_1,g_2(x_1,y))\big) = g_2(x_1,y)$
(e)	$x_2 \leq^{\sigma_2} g_2\big(g_1(y,x_2),y\big)$	*(e')*	$x_1 \leq^{\sigma_1} g_1\big(y,g_2(x_1,y)\big)$
(f)	$g_1\big(y,g_2(g_1(y,x_2),y)\big) = g_1(y,x_2)$	*(f')*	$g_2\big(g_1(y,g_2(x_1,y)),y\big) = g_2(x_1,y)$.

Insbesondere sind für alle $y \in Q$ die Abbildungen $g_2\big(g_1(y,\,\cdot\,),y\big)$ und $g_1\big(y,g_2(\,\cdot\,,y)\big)$ Hüllenoperationen auf P_1 bzw. P_2.

Beweis. Die obigen Aussagen folgen aus der Definition $(\sigma;\tau)$-residuierter Familien, Korollar 2.2.5, Theorem 2.2.13 und Korollar 2.2.10 sowie den bekannten Eigenschaften adjungierter Paare. □

In residuierten ℓ-Monoiden und ähnlichen residuierten algebraischen Strukturen (also Situationen, in denen zusätzlich ein Assoziativgesetz gilt, ein neutrales Element vorliegt, eine Verbandsstruktur gegeben ist etc.) lassen sich über das obige Korollar hinaus natürlich noch viele weitere interessante Gleichungen und Ungleichungen beweisen. Einen guten Überblick liefert [42].

Analog zum Vorgehen für einstellige $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen betrachten wir auch für mehrstellige noch ihre Verknüpfung und außerdem geordnete Mengen solcher Abbildungen. Zunächst zur Komposition:

Theorem 2.2.18. *Seien $P_1, \ldots, P_n, P', P''$ geordnete Mengen, $P = (P_1, \ldots, P_n)$, $\sigma \in \{+,-\}^n$ und $\sigma', \sigma'' \in \{+,-\}$. Ist $f\colon P \to P'$ eine $(\sigma;\sigma')$-residuierte und $g\colon P' \to P''$ eine einstellige $(\sigma';\sigma'')$-residuierte Abbildung, so ist $g \circ f$ eine $(\sigma;\sigma'')$-residuierte Abbildung von $P_1, \ldots, P_n$ in P'' mit*

$$(g \circ f)^{(i)}_{(\sigma;\sigma'')} = f^{(i)}_{(\sigma;\sigma')} \circ \mathrm{id}_P[i \mapsto g^*_{(\sigma';\sigma'')}]$$

für jedes $i \in \underline{n}$.

Beweis. Laut Voraussetzung ist f^a_i $(\sigma_i;\sigma')$-residuiert und g $(\sigma';\sigma'')$-residuiert, nach Lemma 2.1.13 also $(g \circ f)^a_i = g \circ f^a_i$ eine $(\sigma_i;\sigma'')$-residuierte Abbildung für alle $a \in \prod P$ und alle $i \in \underline{n}$. Demnach ist $g \circ f$ $(\sigma;\sigma'')$-residuiert. Außerdem gilt (siehe Lemma 1.1.18)

$$\begin{aligned}\left((g \circ f)^{(i)}_{(\sigma;\sigma'')}\right)^a_i &= \left((g \circ f)^a_i\right)^*_{(\sigma_i;\sigma'')} = (g \circ f^a_i)^*_{(\sigma_i;\sigma'')} = (f^a_i)^*_{(\sigma_i;\sigma')} \circ g^*_{(\sigma';\sigma'')} \\ &= (f^{(i)}_{(\sigma;\sigma')})^a_i \circ g^*_{(\sigma';\sigma'')} = \left(f^{(i)}_{(\sigma;\sigma')} \circ \mathrm{id}_P[i \mapsto g^*_{(\sigma';\sigma'')}]\right)^a_i. \end{aligned}$$ □

Theorem 2.2.19. *Es seien P_k und P'_k für jedes $k \in \underline{n}$ sowie P'' geordnete Mengen, außerdem seien $\sigma, \sigma' \in \{+,-\}^n$ und $\sigma'' \in \{+,-\}$. Weiter sei $f = (f_1, \ldots, f_n)$ eine Familie einstelliger $(\sigma_k;\sigma'_k)$-residuierter Abbildungen $f_k\colon P_k \to P'_k$ $(k \in \underline{n})$, und $g\colon (P'_1, \ldots, P'_n) \to P''$ sei $(\sigma';\sigma'')$-residuiert. Dann ist $g \circ f$ eine $(\sigma;\sigma'')$-residuierte Abbildung von $P_1, \ldots, P_n$ in P'' mit*

$$(g \circ f)^{(i)}_{(\sigma;\sigma'')} = (f_i)^*_{(\sigma_i;\sigma'_i)} \circ g^{(i)}_{(\sigma';\sigma'')} \circ f[i \mapsto \mathrm{id}_{P''}]$$

für alle $i \in \underline{n}$.

Beweis. Es ist $(g \circ f)^a_i = g_i^{\prod f(a)} \circ f_i$, und nach Voraussetzung ist f_i $(\sigma_i;\sigma'_i)$-residuiert und $g_i^{\prod f(a)}$ $(\sigma'_i;\sigma'')$-residuiert, also $(g \circ f)^a_i$ eine $(\sigma_i;\sigma'')$-residuierte Abbildung für alle $a \in \prod P$ und alle $i \in \underline{n}$ (siehe Lemma 2.1.13). Folglich ist $g \circ f$ $(\sigma;\sigma'')$-residuiert, und es gilt

$$\begin{aligned}\left((g \circ f)^{(i)}_{(\sigma;\sigma'')}\right)^a_i &= \left((g \circ f)^a_i\right)^*_{(\sigma_i;\sigma'')} = \left(g_i^{\prod f(a)} \circ f_i\right)^*_{(\sigma_i;\sigma'')} \\ &= (f_i)^*_{(\sigma_i;\sigma'_i)} \circ \left(g_i^{\prod f(a)}\right)^*_{(\sigma'_i;\sigma'')} = (f_i)^*_{(\sigma_i;\sigma'_i)} \circ \left(g^{(i)}_{(\sigma';\sigma'')}\right)_i^{\prod f(a)} \\ &= \left((f_i)^*_{(\sigma_i;\sigma'_i)} \circ g^{(i)}_{(\sigma';\sigma'')} \circ f[i \mapsto \mathrm{id}_{P''}]\right)^a_i. \end{aligned}$$ □

Nun zu geordneten Mengen $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen.

Definition 2.2.20 (Geordnete Mengen $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen)**.** Es bezeichne

$$\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(P;Q)$$

die punktweise geordnete Menge aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen von $P_1, \ldots, P_n$ in Q. Sofern die Stellenzahl n aus dem Zusammenhang hervorgeht, schreiben wir auch $\mathsf{res}(P;Q)$ für $\mathsf{res}_{([+];+)}(P;Q)$.

Lemma 2.2.21. *Für alle Signaturen $(\alpha;\beta), (\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ ist*

$$\left(\mathsf{res}_{(\sigma\alpha;\tau\beta)}(P;Q)\right)^\tau = \mathsf{res}_{(\alpha;\beta)}(P^\sigma;Q^\tau).$$

Beweis. Eine $(\sigma\alpha; \tau\beta)$-residuierte Abbildung von P in Q ist dasselbe wie eine $(\alpha; \beta)$-residuierte Abbildung von P^σ in Q^τ. Da die punktweise Ordnung der Abbildungen von P in Q nur von Q abhängt, ergibt sich die Behauptung. □

Proposition 2.2.22. *Für jedes $i \in \underline{n}$ ist die Abbildung*

$$f \mapsto f^{(i)}_{(\sigma;\tau)},$$

die jedem $(\sigma; \tau)$-residuierten $f\colon P \to Q$ das i-te $(\sigma; \tau)$-Residual $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}\colon P[i \mapsto Q] \to P_i$ zuordnet, ein Isomorphismus zwischen den geordneten Mengen

- $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(P; Q)^\tau$ *aller $(\sigma; \tau)$-residuierten Abbildungen von $P_1, \ldots, P_n$ in Q und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)^{-i}}(P[i \mapsto Q]; P_i)^{-\sigma_i}$ *aller $(\sigma; \tau)^{-i}$-residuierten Abbildungen von $P_1, \ldots, Q, \ldots, P_n$ in P_i*

mit der Inversen $g \mapsto g^{(i)}_{(\sigma;\tau)^{-i}}$.

Beweis. Nach Theorem 2.2.13 ist nur noch zu zeigen, dass die Abbildung $f \mapsto f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ von $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(P; Q)$ in $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)^{-i}}(P[i \mapsto Q]; P_i)$ $(\tau; -\sigma_i)$-monoton ist, d. h. für alle $(\sigma; \tau)$-residuierten Abbildungen $f, h\colon P \to Q$

$$h \leq^\tau f \quad \Longrightarrow \quad f^{(i)}_{(\sigma;\tau)} \leq^{\sigma_i} h^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$$

gilt. Sei dafür $h \leq^\tau f$ und $a \in \prod P$. Dann ist $h^a_i \leq^\tau f^a_i$ und mit Proposition 2.1.15

$$(f^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^a_i = (f^a_i)^*_{(\sigma_i;\tau)} \leq^{\sigma_i} (h^a_i)^*_{(\sigma_i;\tau)} = (h^{(i)}_{(\sigma;\tau)})^a_i,$$

woraus die Behauptung folgt. □

2.2.3 Residuiertheit im Falle vollständiger Verbände

Als nächstes werden $(\sigma; \tau)$-residuierte Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden charakterisiert. Zur Vorbereitung beginnen wir mit einer einfachen Feststellung zu mehrstelligen Abbildungen und iterierten Suprema.

Lemma 2.2.23. *Seien X_1, X_2 Mengen, L ein vollständiger Verband und f eine zweistellige Abbildung von X_1, X_2 in L. Dann gilt für alle $A_1 \subseteq X_1$, $A_2 \subseteq X_2$*

$$\begin{aligned}\bigvee f[A_1, A_2] &= \bigvee\{\, \bigvee\{\, f(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \,\} : x_2 \in A_2 \,\}\\ &= \bigvee\{\, \bigvee\{\, f(x_1, x_2) : x_2 \in A_2 \,\} : x_1 \in A_1 \,\}.\end{aligned}$$

Analoge Aussagen lassen sich für n-stellige Abbildungen und dual für Infima formulieren.

Beweis. Mit der Vollassoziativität des Supremums ergibt sich

$$\begin{aligned}\bigvee f[A_1, A_2] &= \bigvee\{\, f(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \;\&\; x_2 \in A_2 \,\}\\ &= \bigvee \bigcup\{\, \{\, f(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \,\} : x_2 \in A_2 \,\}\\ &= \bigvee\{\, \bigvee\{\, f(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \,\} : x_2 \in A_2 \,\}.\end{aligned}$$

□

Theorem 2.2.24. *Es sei $(L; M) = (L_1, \dots, L_n; M)$ eine Familie vollständiger Verbände und $f\colon L \to M$ eine n-stellige Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist $(\sigma;\tau)$-residuiert.

(2) Für jedes $i \in \underline{n}$, alle $a \in \prod L$ und alle $A_i \subseteq L_i$ gilt

$$f(a_1, \dots, \bigvee^{\sigma_i} A_i, \dots, a_n) = \bigvee^{\tau}\{\, f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) : x_i \in A_i \,\}.$$

(3) f ist als Abbildung von L^σ in M^τ in jeder Variablen $\bigvee$-erhaltend.

(4) Für alle $A_i \subseteq L_i$ $(i \in \underline{n})$ gilt:

$$f(\bigvee^{\sigma_1} A_1, \dots, \bigvee^{\sigma_n} A_n) = \bigvee^{\tau} f[A_1, \dots, A_n].$$

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen(1)–(3) ergibt sich aus Korollar 2.2.5, da die (einstelligen) residuierten Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden genau die $\bigvee$-erhaltenden sind (siehe Proposition 1.2.35). Aussage (2) besagt somit, dass f für alle $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert ist.

(2) $\Rightarrow$ (4): Vollständige Induktion über die Stellenzahl n von f. Im Fall $n = 0$ oder $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Für alle $i \in \underline{n+1}$ sei nun $A_i \subseteq L_i$ und $f\colon (L_1, \dots, L_n, L_{n+1}) \to M$ in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert. Mit der Abbildung $g\colon (L_1, \dots, L_n) \to M$, definiert durch

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, \bigvee^{\sigma_{n+1}} A_{n+1}),$$

gilt dann nach Induktionsvoraussetzung (für g) und Lemma 2.2.23

$$\begin{aligned} & f(\bigvee^{\sigma_1} A_1, \dots, \bigvee^{\sigma_n} A_n, \bigvee^{\sigma_{n+1}} A_{n+1}) = g(\bigvee^{\sigma_1} A_1, \dots, \bigvee^{\sigma_n} A_n) = \bigvee^{\tau} g[A_1, \dots, A_n] \\ & = \bigvee^{\tau}\{\, f(x_1, \dots, x_n, \bigvee^{\sigma_{n+1}} A_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in \textstyle\prod_{i=1}^n A_i \,\} \\ & = \bigvee^{\tau}\{\, \bigvee^{\tau}\{\, f(x_1, \dots, x_n, y) : y \in A_{n+1} \,\} : (x_1, \dots, x_n) \in \textstyle\prod_{i=1}^n A_i \,\} \\ & = \bigvee^{\tau} f[A_1, \dots, A_n, A_{n+1}]. \end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$ (2): Sei $i \in \underline{n}$. Nach Voraussetzung gilt für alle $a \in \prod L$ und alle $A_i \subseteq L_i$

$$\begin{aligned} f_i^a(\bigvee^{\sigma_i} A_i) &= f(\bigvee^{\sigma_1}\{a_1\}, \dots, \bigvee^{\sigma_i} A_i, \dots, \bigvee^{\sigma_n}\{a_n\}) \\ &= \bigvee^{\tau} f[\{a_n\}, \dots, A_i, \dots, \{a_n\}] = \bigvee^{\tau} f_i^a[A_i], \end{aligned}$$

also ist f in der i-ten Variablen $(\sigma_i;\tau)$-residuiert. □

Laut Aussage (4) des obigen Theorems lässt sich die Residuiertheit einer mehrstelligen Abbildung also bereits durch eine einzige Aussage für alle Variablen formulieren.

Diese Charakterisierung bedeutet jedoch nicht, dass mehrstellige residuierte Abbildungen von L_1, …, L_n in M Suprema *beliebiger* Teilmengen von $\prod L$ bewahren müssen, sofern sie als einstellige Abbildung von $\prod L$ in M aufgefasst werden. Stattdessen bewahren sie im allgemeinen nur Suprema von Produkten $\prod A$, denn es ist $(\bigvee_{L_1} A_1, \dots, \bigvee_{L_n} A_n) = \bigvee_{\prod L} \prod_{i=1}^n A_i$. Das folgende Beispiel erläutert dies.

Beispiel 2.2.25. Sei $(L; M)$ eine Familie vollständiger Verbände. Ist $f\colon \prod L \to M$ eine $\bigvee$-erhaltende Abbildung, so ist f, aufgefasst als n-stellige Funktion von $L_1, \ldots, L_n$ in M, in jeder Variablen $\bigvee$-erhaltend, denn für alle $i \in \underline{n}$, $a \in \prod L$ und $A_i \subseteq L_i$ ist

$$\begin{aligned} f_i^a(\textstyle\bigvee_{L_i} A_i) &= f(\textstyle\bigvee_{L_1}\{a_1\}, \ldots, \bigvee_{L_i} A_i, \ldots, \bigvee_{L_i}\{a_n\}) \\ &= f(\textstyle\bigvee_{\prod L}(\{a_1\} \times \ldots \times A_i \times \ldots \times \{a_n\})) \\ &= \textstyle\bigvee_M f[\{a_1\} \times \ldots \times A_i \times \ldots \times \{a_n\}] = \bigvee_M f_i^a[A_i]. \end{aligned}$$

Die Umkehrung ist allerdings falsch. Man betrachte beispielsweise den vollständigen Verband $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \leq)$ und die Abbildung $f\colon (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \to \mathbf{2}$ mit

$$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = 0 \quad \text{und} \quad f(1,1) = 1.$$

f ist in jeder Variablen $\bigvee$-erhaltend, denn $f(\,\cdot\,,0) = f(0,\,\cdot\,)$ ist die konstante Abbildung mit dem Wert 0, und $f(\,\cdot\,,1) = f(1,\,\cdot\,)$ ist die Identität auf $\mathbf{2}$. Aufgefasst als einstellige Abbildung von $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ in $\mathbf{2}$, ist f aber *nicht* $\bigvee$-erhaltend:

$$f\big((1,0) \vee (0,1)\big) = f(1,1) = 1 \neq 0 = f(1,0) \vee f(0,1).$$

Eine zweistellige residuierte Abbildung $f\colon L \times M \to N$ zwischen vollständigen Verbänden L, M und N wird auch *Bimorphismus* genannt, vergleiche etwa [2], [57]. Mit dem Tensorprodukt $L \otimes M$ vollständiger Verbände lassen sich Bimorphismen auf residuierte Abbildungen zurückführen, denn es gilt (siehe [71], [85])

$$\mathsf{res}(L, M; N) \cong \mathsf{res}(L \otimes M; N).$$

Beispiel 2.2.26. Ein *Quantal* ist eine vollständige residuierte Halbgruppe, d. h. ein vollständiger Verband L zusammen mit einer assoziativen zweistelligen Operation $\circ$ auf L, die in jeder Variablen residuiert ist. Die Residuiertheit in beiden Variablen ist äquivalent zu

$$x \circ (\textstyle\bigvee B) = \bigvee\{\, x \circ y : y \in B \,\}, \qquad (\bigvee A) \circ y = \bigvee\{\, x \circ y : x \in A \,\}$$

für alle $x, y \in L$ und alle $A, B \subseteq L$. Nach Theorem 2.2.24 lässt sich die Residuiertheit von $\circ$ auch charakterisieren durch

$$(\textstyle\bigvee A) \circ (\bigvee B) = \bigvee\{\, x \circ y : x \in A,\ y \in B \,\} \qquad (A, B \subseteq L).$$

Ist $\circ$ das binäre Infimum von L, so ist L eine vollständige Heyting-Algebra (siehe Beispiel 2.2.16), die auch *Rahmen* oder *Lokal* genannt wird. Hintergründe zu Rahmen und Lokalen finden sich unter anderem in [54].

Ein *unitales* Quantal $(L, \circ, e)$ ist ein vollständiges residuiertes Monoid (d. h. $(L, \circ)$ ist ein Quantal mit neutralem Element e). Die Theorie der Quantale wird in [82] ausführlich dargestellt.

Für σ-Erzeuger und $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden erhält man die folgende Verallgemeinerung von Lemma 1.2.38.

Proposition 2.2.27. *Sei $(L; M) = (L_1, \ldots, L_n; M)$ eine Familie vollständiger Verbände und $B = (B_1, \ldots, B_n)$ ein σ-Erzeuger von L. Ist $f\colon L \to M$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung, so gilt für alle $x \in \prod L$*

$$f(x) = \textstyle\bigvee_M^\tau\{\, f(b) : b \in \prod B \;\&\; b \leq_L^\sigma x \,\}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung und Theorem 2.2.24 ist

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, \dots, x_n) &= f\big(\textstyle\bigvee_{L_1}^{\sigma_1}(\downarrow_{L_1}^{\sigma_1} x_1 \cap B_1), \dots, \bigvee_{L_n}^{\sigma_n}(\downarrow_{L_n}^{\sigma_n} x_n \cap B_n)\big) \\ &= \textstyle\bigvee_M^\tau f[\downarrow_{L_1}^{\sigma_1} x_1 \cap B_1, \dots, \downarrow_{L_n}^{\sigma_n} x_n \cap B_n] = \bigvee_M^\tau \{\, f(b) : b \in \prod B \;\&\; b \leq_L^\sigma x \,\}. \end{aligned} \qquad \square$$

Unter geeigneten Voraussetzungen gilt auch die Umkehrung der obigen Aussage, siehe dazu später das Korollar 3.1.21.

Mit Hilfe von Theorem 2.2.24 lässt sich schließlich auch die folgende Verallgemeinerung von Proposition 1.2.40 zeigen.

Proposition 2.2.28. *Sei $(L; M)$ eine Familie vollständiger Verbände. Dann ist auch die geordnete Menge $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(L; M)$ ein vollständiger Verband, in dem für $\tau = +$ Suprema und für $\tau = -$ Infima punktweise gebildet werden.* $\square$

2.3 Quantaloide und lokal geordnete 2-Kategorien

Alle in den folgenden Kapiteln betrachteten Kategorien haben die Eigenschaft, dass sich ihre Morphismenmengen auf kanonische Weise mit einer Ordnung versehen lassen und die Kompositionsabbildungen mit diesen Ordnungsstrukturen verträglich, also (in jeder Variablen) isoton sind. Solcherart angereicherte Kategorien sind auch als *lokal geordnete 2-Kategorien* bekannt. Sie erlauben insbesondere die allgemeine Definition *adjungierter* Morphismen und bilden aus diesem Grund eine wichtige Grundlage für die folgenden Kapitel.

Lokal geordnete 2-Kategorien, deren Morphismenmengen sogar vollständige Verbände und deren Kompositionsabbildungen in jeder Variablen residuiert sind, werden *Quantaloide* genannt. Tatsächlich sind die meisten der im weiteren Verlauf auftretenden lokal geordneten 2-Kategorien bereits Quantaloide. In Vorbereitung auf die späteren kategorientheoretischen Resultate führen wir in diesem Abschnitt sämtliche benötigten Grundbegriffe für lokal geordnete 2-Kategorien, adjungierte Morphismen und Quantaloide ein.

Alle diese Grundbegriffe lassen sich systematisch in der Theorie der *angereicherten Kategorien* behandeln, die wir hier aber explizit nicht voraussetzen. Siehe dazu auch die Bemerkung 2.3.33 am Schluss dieses Abschnitts.

2.3.1 Lokal geordnete 2-Kategorien

Definition 2.3.1 (Lokal geordnete 2-Kategorien)**.** Eine *lokal geordnete 2-Kategorie* (oder auch *lokal geordnete Bikategorie*) ist eine Kategorie $\mathcal{C}$, so dass

- für alle Objekte $A, B \in |\mathcal{C}|$ die Morphismenmenge $\mathcal{C}(A, B)$ mit einer Ordnung $\leq_{AB}$ versehen ist (wobei im folgenden meistens nur $\mathcal{C}(A, B)$ statt $(\mathcal{C}(A, B), \leq_{AB})$ geschrieben wird),

- die Komposition von Morphismen in $\mathcal{C}$ (in beiden Variablen) isoton ist, d. h. für alle $f, f' \in \mathcal{C}(A, B)$ und $g, g' \in \mathcal{C}(B, C)$ gilt

$$\begin{aligned} f \leq f' \quad &\Longrightarrow \quad g \circ f \leq g \circ f', \\ g \leq g' \quad &\Longrightarrow \quad g \circ f \leq g' \circ f. \end{aligned}$$

Beispiel 2.3.2. Jede Kategorie $\mathcal{A}$ lässt sich mit der Identität auf den Morphismenmengen, also den Antiketten $(\mathcal{A}(A,B),=)$ für $A,B \in |\mathcal{A}|$, als lokal geordnete 2-Kategorie auffassen. Die Isotonie der Komposition ist in diesem Fall trivialerweise erfüllt.

Weitere Beispiele lokal geordneter 2-Kategorien werden weiter unten im Zusammenhang mit adjungierten Morphismen angegeben. Aus der obigen Definition folgt unmittelbar:

Lemma 2.3.3. *Jede Unterkategorie einer lokal geordneten* 2*-Kategorie ist wieder eine lokal geordnete* 2*-Kategorie.* □

Neben der gewöhnlichen dualen Kategorie lassen sich für lokal geordnete 2-Kategorien noch zwei weitere Duale bilden, indem die Ordnung auf den Morphismenmengen dualisiert wird.

Definition 2.3.4 (Duale von lokal geordneten 2-Kategorien)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine lokal geordnete 2-Kategorie. Die lokal geordnete 2-Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ entsteht wie üblich aus $\mathcal{C}$ durch Umkehrung der Pfeile, also $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$ für alle $A,B \in |\mathcal{C}|$.

Ein weiteres Dual $\mathcal{C}^{\mathrm{co}}$ von $\mathcal{C}$ ergibt sich durch $\mathcal{C}^{\mathrm{co}}(A,B) = \mathcal{C}(A,B)^{\mathrm{op}}$ für alle $A,B \in |\mathcal{C}|$, also durch die Umkehrung der Ordnung. Offensichtlich ist auch $\mathcal{C}^{\mathrm{co}}$ eine lokal geordnete 2-Kategorie. Durch Kombination dieser beiden Duale erhält man schließlich $\mathcal{C}^{\mathrm{co\,op}}$ mit $\mathcal{C}^{\mathrm{co\,op}}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)^{\mathrm{op}}$.

Wir erweitern nun Funktoren, Isomorphismen und Äquivalenzen zwischen Kategorien auf naheliegende Weise zu 2-Funktoren, 2-Isomorphismen und 2-Äquivalenzen zwischen lokal geordneten 2-Kategorien.

Definition 2.3.5 (2-Funktoren und 2-Isomorphismen)**.** Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ lokal geordnete 2-Kategorien. Ein 2*-Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein gewöhnlicher Funktor (wobei $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ als gewöhnliche Kategorien aufgefasst werden), so dass für alle $A,B \in |\mathcal{C}|$ die Abbildungen

$$F_{AB}\colon (\mathcal{C}(A,B), \leq_{AB}) \to (\mathcal{D}(FA,FB), \leq_{FA,FB})$$

isoton sind.

Ein gewöhnlicher Isomorphismus $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt 2*-Isomorphismus*, wenn sowohl F als auch $F^{-1}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 2-Funktoren sind. Wir nennen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ *isomorph*, wenn es einen 2-Isomorphismus zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ gibt.

Die übliche Komposition von 2-Funktoren ergibt offenbar wieder einen 2-Funktor, und auch der Identitätsfunktor $1_{\mathcal{C}}$ auf einer lokal geordneten 2-Kategorie ist stets ein 2-Funktor.

Definition 2.3.6 (2-Äquivalenzen)**.** Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ lokal geordnete 2-Kategorien. Eine 2*-Äquivalenz* von $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ ist ein 2-Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, zu dem es einen 2-Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt mit $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$ (aufgefasst als gewöhnliche Funktoren). Gibt es eine 2-Äquivalenz zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, so nennen wir $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ *äquivalent.*

$(F,G,\eta,\varepsilon)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt 2*-adjungierte* 2*-Äquivalenz* oder einfach *adjungierte* 2*-Äquivalenz*, wenn (F,G,η,ε) eine gewöhnliche adjungierte Äquivalenz von Kategorien ist und F, G außerdem 2-Funktoren sind.

Jede (2-adjungierte) 2-Äquivalenz von lokal geordneten 2-Kategorien ist auch eine gewöhnliche (adjungierte) Äquivalenz der zugrundeliegenden Kategorien.

Aus der bekannten Verknüpfung gewöhnlicher adjungierter Situationen ergibt sich speziell der folgende, für später nützliche Sachverhalt.

Korollar 2.3.7. *Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ lokal geordnete 2-Kategorien und $I\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, $J\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 2-Isomorphismen. Für jede adjungierte 2-Äquivalenz $(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sind auch*

$$(F \circ I, I^{-1} \circ G, 1_{I^{-1}} * \eta * 1_I, \varepsilon)\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{D},$$
$$(J \circ F, G \circ J^{-1}, \eta, 1_J * \varepsilon * 1_{J^{-1}})\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$$

adjungierte 2-Äquivalenzen.

Dabei ist $(1_{I^{-1}} * \eta * 1_I)_A = I^{-1}(\eta_{IA})$ für jedes $A \in |\mathcal{C}'|$ und $(1_J * \varepsilon * 1_{J^{-1}})_B = J(\varepsilon_{J^{-1}B})$ für jedes $B \in |\mathcal{D}'|$.

Beweis. Nach Voraussetzung sind $(I, I^{-1}, 1_{1_{\mathcal{C}'}}, 1_{1_{\mathcal{C}}})$ und $(J, J^{-1}, 1_{1_{\mathcal{D}}}, 1_{1_{\mathcal{D}'}})$ insbesondere adjungierte 2-Äquivalenzen. Mit Proposition 1.3.9 folgt dann die Behauptung. □

Für eine kategorielle Äquivalenz $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sind die Abbildungen

$$F_{AB}\colon \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$$

bekanntlich Bijektionen. Ist F darüber hinaus eine 2-Äquivalenz von lokal geordneten 2-Kategorien, so sind die induzierten Abbildungen F_{AB} sogar Ordnungsisomorphismen. Denn es lässt sich problemlos zeigen:

Proposition 2.3.8. *Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ lokal geordnete 2-Kategorien und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein gewöhnlicher Funktor.*

(a) F ist genau dann eine 2-Äquivalenz, wenn F eine gewöhnliche Äquivalenz von Kategorien und F_{AB} für alle $A, B \in |\mathcal{C}|$ ein Ordnungsisomorphismus ist.

(b) F ist genau dann ein 2-Isomorphismus, wenn F ein gewöhnlicher Isomorphismus und F_{AB} für alle $A, B \in |\mathcal{C}|$ ein Ordnungsisomorphismus ist. □

2.3.2 Adjunktionen in lokal geordneten 2-Kategorien

Mit der in lokal geordneten 2-Kategorien zur Verfügung stehenden Ordnung von Morphismen lässt sich der Begriff der Adjunktion für isotone Abbildungen zwischen geordneten Mengen (siehe Definition 1.2.31) auf Morphismen einer beliebigen lokal geordneten 2-Kategorie übertragen.

Definition 2.3.9 (Adjunktionen in lokal geordneten 2-Kategorien)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine lokal geordnete 2-Kategorie. Zwei $\mathcal{C}$-Morphismen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ bilden ein *adjungiertes Paar* oder eine *Adjunktion* (f, g) *in* $\mathcal{C}$, wenn gilt:

$$1_A \leq g \circ f, \qquad f \circ g \leq 1_B.$$

Wir schreiben dies auch in der Form $f \dashv g$. Dabei heißt f *untere* oder *linke Adjungierte* (von g) und g *obere* oder *rechte Adjungierte* (von f). Ist (f, g) ein adjungiertes Paar, so nennen wir (g, f) ein *co-adjungiertes Paar*.

Ein $\mathcal{C}$-Morphismus $f\colon A \to B$ heißt *adjungiert* (bzw. *co-adjungiert*), wenn er eine untere (bzw. obere) Adjungierte besitzt, d. h. wenn ein $\mathcal{C}$-Morphismus $g\colon B \to A$ existiert mit $g \dashv f$ (bzw. $f \dashv g$).

Es folgen einige fundamentale Eigenschaften von Adjunktionen in lokal geordneten 2-Kategorien.

Lemma 2.3.10. *Sei $\mathcal{C}$ eine lokal geordnete 2-Kategorie, und $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ seien $\mathcal{C}$-Morphismen. Bilden f und g eine Adjunktion $f \dashv g$, so gilt*

$$f \circ g \circ f = f \quad \textit{und} \quad g \circ f \circ g = g,$$

Beweis. Aufgrund der Isotonie der Komposition ergibt sich $f = f \circ 1_A \leq f \circ g \circ f \leq 1_B \circ f = f$, und analog erhält man die zweite Gleichung. □

Proposition 2.3.11. *Es sei $\mathcal{C}$ eine lokal geordnete 2-Kategorie, und es seien $f, f'\colon A \to B$, $g, g'\colon B \to A$, $k\colon B \to C$, $l\colon C \to B$ Morphismen in $\mathcal{C}$.*

(a) Es gelte $f \dashv g$ und $f' \dashv g'$. Aus $f \leq f'$ folgt $g' \leq g$; aus $g \leq g'$ folgt $f' \leq f$.

(b) Aus $f \dashv g$ und $f \dashv g'$ folgt $g = g'$; aus $f \dashv g$ und $f' \dashv g$ folgt $f = f'$.

(c) Mit $f \dashv g$ und $k \dashv l$ gilt auch $k \circ f \dashv g \circ l$.

(d) Es gilt $1_D \dashv 1_D$.

(e) Für jeden Isomorphismus $i\colon D \to E$ in $\mathcal{C}$ gilt $i^{-1} \dashv i$ und $i \dashv i^{-1}$.

(f) Jeder 2-Funktor bewahrt adjungierte Paare: Ist $\mathcal{D}$ eine weitere lokal geordnete 2-Kategorie und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein 2-Funktor, so gilt

$$f \dashv g \quad \Longrightarrow \quad F(f) \dashv F(g).$$

Beweis. Zu (a). Aus $f \dashv g$ und $f' \dashv g'$ sowie $f \leq f'$ ergibt sich $g' = 1_A \circ g' \leq g \circ f \circ g' \leq g \circ f' \circ g' \leq g \circ 1_B = g$. Die zweite Behauptung erhält man analog. Zu (b). Dies folgt leicht aus (a). Zu (c). Gilt $f \dashv g$ und $k \dashv l$, so auch $1_A \leq g \circ f = g \circ 1_B \circ f \leq g \circ l \circ k \circ f$ und $k \circ f \circ g \circ l \leq k \circ 1_B \circ l = k \circ l \leq 1_C$, also $k \circ f \dashv g \circ l$. Aussage (d) ist klar, und (e) gilt wegen $i \circ i^{-1} = 1_E$ und $i^{-1} \circ i = 1_D$. Zu (f). Da F ein 2-Funktor ist, sind für alle $\mathcal{C}$-Objekte D, E die Abbildungen F_{DE} isoton. Aus $1_A \leq g \circ f$ und $f \circ g \leq 1_B$ folgt somit $1_{FA} = F_{AA}(1_A) \leq F_{AA}(g \circ f) = F_{BA}(g) \circ F_{AB}(f)$ und $F_{AB}(f) \circ F_{BA}(g) \leq 1_{FB}$, also $F(f) \dashv F(g)$. □

Aus dieser Proposition ergeben sich einige nützliche Folgerungen. Zunächst liefert die Beschränkung der Morphismen einer lokal geordneten 2-Kategorie auf die adjungierten (bzw. co-adjungierten) wieder eine lokal geordnete 2-Kategorie.

Definition 2.3.12 (Lokal geordnete 2-Kategorien der (co-)adjungierten Morphismen)**.** Für eine lokal geordnete 2-Kategorie $\mathcal{C}$ bezeichne

$$\mathrm{Adj}(\mathcal{C}) \quad (\text{bzw. Co-Adj}(\mathcal{C}))$$

diejenige lokal geordnete 2-Kategorie, deren Objekte dieselben sind wie die von $\mathcal{C}$ (d. h. $|\mathrm{Adj}(\mathcal{C})| = |\mathcal{C}| = |\text{Co-Adj}(\mathcal{C})|$) und deren geordnete Morphismenmengen $\mathrm{Adj}(\mathcal{C})(A, B)$ (bzw. $\text{Co-Adj}(\mathcal{C})(A, B)$) aus $\mathcal{C}(A, B)$ durch Einschränkung auf die adjungierten (bzw. co-adjungierten) Morphismen entstehen (mit der durch $\mathcal{C}(A, B)$ induzierten Ordnung).

Die Isomorphismen in $\mathcal{C}$ sind offenbar dieselben wie in $\mathrm{Adj}(\mathcal{C})$ (und auch dieselben wie in $\text{Co-Adj}(\mathcal{C})$); dies gilt erst recht für die Identitäten. Die Komponenten eines adjungierten Paares sind eindeutig durcheinander bestimmt, und man erhält die folgende Beziehung zwischen $\mathrm{Adj}(\mathcal{C})$ und $\text{Co-Adj}(\mathcal{C})$.

Korollar 2.3.13. *Für jede lokal geordnete 2-Kategorie $\mathcal{C}$ gilt*

$$\text{Co-Adj}(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Adj}(\mathcal{C})^{\mathrm{co\,op}}.$$

Beweis. Wird jedem co-adjungierten $\mathcal{C}$-Morphismus f seine eindeutig bestimmte obere Adjungierte $F(f)$ zugeordnet, so ergibt sich (mit der Identität auf den Objekten) ein 2-Isomorphismus $F\colon \text{Co-Adj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Adj}(\mathcal{C})^{\mathrm{co\,op}}$, wie mit Proposition 2.3.11 leicht zu erkennen ist. □

Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ lokal geordnete 2-Kategorien und ist $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein 2-Funktor, so entstehen durch Restriktion die 2-Funktoren

$$F\colon \mathrm{Adj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Adj}(\mathcal{D}) \quad \text{und} \quad F\colon \text{Co-Adj}(\mathcal{C}) \to \text{Co-Adj}(\mathcal{D}),$$

die nicht ganz eindeutig wieder mit F bezeichnet werden. Auch (2-adjungierte) 2-Äquivalenzen lassen sich entsprechend einschränken:

Lemma 2.3.14. *Es sei $(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine 2-adjungierte 2-Äquivalenz von lokal geordneten 2-Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Für die durch Restriktion entstehenden 2-Funktoren*

$$F\colon \mathrm{Adj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Adj}(\mathcal{D}), \qquad G\colon \mathrm{Adj}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Adj}(\mathcal{C})$$

und die zugehörigen natürlichen Isomorphismen $\eta\colon 1_{\mathrm{Adj}(\mathcal{C})} \Rightarrow G \circ F$, $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_{\mathrm{Adj}(\mathcal{D})}$ ist auch

$$(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathrm{Adj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Adj}(\mathcal{D})$$

eine 2-adjungierte 2-Äquivalenz. Analoges gilt für $\text{Co-Adj}(\mathcal{C})$ und $\text{Co-Adj}(\mathcal{D})$.

Beweis. Dies ergibt sich aus Proposition 2.3.11, derzufolge 2-Funktoren Adjunktionen bewahren und alle Isomorphismen in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowohl adjungiert als auch co-adjungiert sind. □

Wir kommen nun zu einigen wichtigen Beispielen für lokal geordnete 2-Kategorien und (co-)adjungierte Morphismen.

Beispiel 2.3.15. Die Kategorie Pos der geordneten Mengen und isotonen Abbildungen ist eine lokal geordnete 2-Kategorie: Die Ordnung auf den Morphismenmengen $\mathsf{Pos}(P, Q)$ ist durch die punktweise Ordnung von Funktionen gegeben (d. h. es ist $\mathsf{Pos}(P, Q) = Q^P$), und für alle isotonen Abbildungen $f, f'\colon O \to P$, $g, g'\colon P \to Q$ gilt offenbar

$$\begin{aligned} f \le f' &\quad\Longrightarrow\quad g \circ f \le g \circ f', \\ g \le g' &\quad\Longrightarrow\quad g \circ f \le g' \circ f. \end{aligned}$$

Die Adjunktionen in Pos sind genau die ordnungstheoretischen (vergleiche die Definitionen 1.2.31 und 2.3.9). Co-adjungierte Morphismen in Pos sind also gerade die residuierten Abbildungen, und adjungierte Morphismen sind die dual residuierten Abbildungen. Damit ist

$$\text{Co-Adj}(\mathsf{Pos})(P, Q) = \mathsf{res}(P; Q) \quad \text{und} \quad \mathrm{Adj}(\mathsf{Pos})(P, Q) = \mathsf{res}_{(-;-)}(P; Q)$$

für alle geordneten Mengen P, Q.

Beispiel 2.3.16. Die Kategorie Rel der Mengen und Relationen ist bezüglich der Inklusion $\subseteq$ eine lokal geordnete 2-Kategorie, denn für alle Relationen $R, R' : X \rightharpoondown Y$, $S, S' : Y \rightharpoondown Z$ gilt

$$\begin{aligned} R \subseteq R' &\quad\Longrightarrow\quad S \circ R \subseteq S \circ R', \\ S \subseteq S' &\quad\Longrightarrow\quad S \circ R \subseteq S' \circ R. \end{aligned}$$

Die geordneten Morphismenmengen sind also $\mathsf{Rel}(X, Y) = \mathfrak{P}(X \times Y) = \mathsf{Rel}(X; Y)$.

Eine Relation $R : X \rightharpoondown Y$ ist nach Definition genau dann co-adjungiert in Rel, wenn es eine Relation $S : Y \rightharpoondown X$ gibt mit

$$\mathrm{id}_X \subseteq S \circ R \quad \text{und} \quad R \circ S \subseteq \mathrm{id}_Y.$$

Die co-adjungierten Relationen sind bekanntlich gerade die *Funktionen* (weshalb im englischen Sprachgebrauch ganz allgemein ein co-adjungierter Morphismus auch *map* genannt wird). Folglich ist

$$\text{Co-Adj}(\mathsf{Rel}) = \mathsf{Set},$$

wobei auch Set als lokal geordnete 2-Kategorie aufgefasst wird. Die Inklusionsordnung auf den Morphismenmengen $\mathsf{Set}(X, Y) = Y^X$ ist die Identität.

Beispiel 2.3.17. Die Kategorie SL der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen ist (als Unterkategorie von Pos) eine lokal geordnete 2-Kategorie bezüglich der punktweisen Ordnung von Funktionen. Ebenso ist die Kategorie CL der vollständigen Verbände und vollständigen Homomorphismen eine lokal geordnete 2-Kategorie.

Die adjungierten Morphismen in SL sind nach Definition diejenigen residuierten Abbildungen, die obere Adjungierte einer residuierten Abbildung (also selbst dual residuiert) sind. Somit sind die adjungierten Morphismen in SL genau die *vollständigen Homomorphismen*, kurz:

$$\text{Adj}(\mathsf{SL}) = \mathsf{CL}.$$

Die co-adjungierten Morphismen in SL sind die *doppelt residuierten* Abbildungen, d. h. diejenigen residuierten Abbildungen $f\colon L \to M$, deren obere Adjungierte $f^*\colon M \to L$ wiederum residuiert ist.

Als Kategorie ist SL selbstdual. Genauer: Ordnet man jedem vollständigen Verband L seinen dualen Verband $D(L) := L^{\mathrm{op}}$ und jeder residuierten Abbildung $f\colon L \to M$ zwischen vollständigen Verbänden ihre obere Adjungierte $D(f) := f^*\colon D(M) \to D(L)$ zu (aufgefasst als residuierte Abbildung), so erhält man offensichtlich einen 2-Isomorphismus $D\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{SL}^{\mathrm{op}}$. Die Festlegung $E(L) := L$ und $E(f) := f^*\colon E(M) \to E(L)$ liefert hingegen einen 2-Isomorphismus $E\colon \mathsf{SL} \to (\mathsf{SL}^d)^{\mathrm{co\,op}}$ (vergleiche Korollar 2.3.13), wobei SL^d die lokal geordnete 2-Kategorie der vollständigen Verbände und dual residuierten Abbildungen (mit der punktweisen Ordnung von Funktionen) bezeichnet.

2.3.3 Quantaloide

Für eine umfassende Darstellung der Theorie der Quantaloide sei auf [83] verwiesen.

Definition 2.3.18 (Quantaloide)**.** Ein *Quantaloid* ist eine Kategorie $\mathcal{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle Objekte $A, B \in |\mathcal{Q}|$ ist die Morphismenmenge $\mathcal{Q}(A, B)$ mit einer Ordnung $\leq_{AB}$ versehen, so dass $(\mathcal{Q}(A, B), \leq_{AB})$ ein vollständiger Verband ist (der im folgenden meist nur mit $\mathcal{Q}(A, B)$ bezeichnet wird).
- Die Komposition von Morphismen in $\mathcal{Q}$ ist in beiden Variablen $\bigvee$-erhaltend, d. h. die zweistelligen Abbildungen $\circ_{ABC} \colon \mathcal{Q}(B, C) \times \mathcal{Q}(A, B) \to \mathcal{Q}(A, C)$ sind für alle Objekte $A, B, C \in |\mathcal{Q}|$ residuiert:

$$\begin{aligned} g \circ \left(\bigvee \mathcal{F}\right) &= \bigvee \{\, g \circ f : f \in \mathcal{F} \,\} &\qquad& \text{für alle } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q}(A, B),\ g \in \mathcal{Q}(B, C), \\ \left(\bigvee \mathcal{G}\right) \circ f &= \bigvee \{\, g \circ f : g \in \mathcal{G} \,\} && \text{für alle } f \in \mathcal{Q}(A, B),\ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{Q}(B, C). \end{aligned}$$

Nach Theorem 2.2.24 lässt sich die Residuiertheit der Kompositionsabbildungen auch charakterisieren durch

$$\left(\bigvee \mathcal{G}\right) \circ \left(\bigvee \mathcal{F}\right) = \bigvee \{\, g \circ f : f \in \mathcal{F},\ g \in \mathcal{G} \,\} \quad \text{für alle } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q}(A, B),\ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{Q}(B, C).$$

Aus der Definition folgt unmittelbar:

Lemma 2.3.19. *Jedes Quantaloid ist eine lokal geordnete* 2*-Kategorie. Jede* volle *Unterkategorie eines Quantaloids ist wieder ein Quantaloid.* □

Quantaloide stellen in folgendem Sinne eine kategorientheoretische Verallgemeinerung von Quantalen dar:

Beispiel 2.3.20. Die kleinen Quantaloide mit nur einem Objekt entsprechen genau den unitalen Quantalen (vgl. Beispiel 2.2.26).

Wie für lokal geordnete 2-Kategorien übertragen wir zunächst die Begriffe Funktor, Isomorphismus und Äquivalenz geeignet auf Quantaloide und erhalten so Quantaloid-Homomorphismen, Quantaloid-Isomorphismen und Quantaloid-Äquivalenzen.

Definition 2.3.21 (Quantaloid-Homomorphismen)**.** Seien $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ Quantaloide. Ein *Quantaloid-Homomorphismus* $F \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ ist ein gewöhnlicher Funktor von $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{R}$, so dass für alle $A, B \in |\mathcal{Q}|$ die Abbildungen

$$F_{AB} \colon \mathcal{Q}(A, B) \to \mathcal{R}(FA, FB)$$

residuiert (d. h. $\bigvee$-erhaltend) sind.

Ein Quantaloid-Homomorphismus $F \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ heißt *Quantaloid-Isomorphismus*, wenn es einen Quantaloid-Homomorphismus $G \colon \mathcal{R} \to \mathcal{Q}$ mit $G \circ F = 1_{\mathcal{Q}}$ und $F \circ G = 1_{\mathcal{R}}$ gibt. In diesem Fall werden $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ *isomorph* genannt.

Augenscheinlich ergibt die übliche Komposition von Quantaloid-Homomorphismen wieder einen solchen, und der Identitätsfunktor $1_{\mathcal{Q}}$ ist immer ein Quantaloid-Homomorphismus.

Lemma 2.3.22. *Jeder Quantaloid-Homomorphismus ist ein* 2*-Funktor.*

Beweis. Jede $\bigvee$-erhaltende Abbildung ist insbesondere isoton. □

Definition 2.3.23 (Quantaloid-Äquivalenzen)**.** Seien $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ Quantaloide. Ein Quantaloid-Homomorphismus $F\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ heißt *Quantaloid-Äquivalenz*, falls es einen Quantaloid-Homomorphismus $G\colon \mathcal{R} \to \mathcal{Q}$ und (gewöhnliche) natürliche Isomorphismen $G \circ F \cong 1_{\mathcal{Q}}$ und $F \circ G \cong 1_{\mathcal{R}}$ gibt. $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ werden *äquivalent* genannt, wenn eine Quantaloid-Äquivalenz zwischen ihnen existiert.

Eine *adjungierte Quantaloid-Äquivalenz* $(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ ist eine gewöhnliche adjungierte Äquivalenz, so dass F und G Quantaloid-Homomorphismen sind.

Äquivalenzen bzw. Isomorphismen sind für Quantaloide dasselbe wie für lokal geordnete 2-Kategorien, was wir im nächsten Korollar festhalten.

Korollar 2.3.24. *Seien $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ Quantaloide.*

(a) Für jeden gewöhnlichen Funktor $F\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ gilt: F ist genau dann eine Quantaloid-Äquivalenz (bzw. ein Quantaloid-Isomorphismus), wenn F eine 2-Äquivalenz (bzw. ein 2-Isomorphismus) ist.

(b) Für jede gewöhnliche adjungierte Äquivalenz $(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ gilt: $(F, G, \eta, \varepsilon)$ ist genau dann eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz, wenn $(F, G, \eta, \varepsilon)$ eine 2-adjungierte 2-Äquivalenz ist.

Beweis. Die Behauptungen folgen aus Lemma 2.3.22 und Proposition 2.3.8, denn jeder Ordnungsisomorphismus ist insbesondere residuiert. □

Da die Kompositionsabbildungen von Quantaloiden in beiden Variablen residuiert sind, können wir nun alle bisher entwickelten Bezeichnungen und Resultate für allgemeine residuierte Abbildungen auf Quantaloide anwenden.

Definition 2.3.25 (Residuale in Quantaloiden)**.** Sei $\mathcal{Q}$ ein Quantaloid. Für alle $A, B, C \in |\mathcal{Q}|$ ist nach Definition die Kompositionsabbildung $\circ_{ABC}$ von $\mathcal{Q}(B, C)$ und $\mathcal{Q}(A, B)$ in $\mathcal{Q}(A, C)$ $(+, +; +)$-residuiert. Somit existieren die beiden Residuale

$$\leftarrow_{ABC} := (\circ_{ABC})^{(1)} \quad \text{und} \quad \rightarrow_{ABC} = (\circ_{ABC})^{(2)},$$

das *erste* (*linke*) und das *zweite* (*rechte*) *Residual der Komposition* (siehe Abbildung 2.1). Die Abbildung

$$\leftarrow_{ABC}\colon \mathcal{Q}(A, C) \times \mathcal{Q}(A, B) \to \mathcal{Q}(B, C)$$

ist demzufolge $(-, +; -)$-residuiert, und

$$\rightarrow_{ABC}\colon \mathcal{Q}(B, C) \times \mathcal{Q}(A, C) \to \mathcal{Q}(A, B)$$

ist $(+, -; -)$-residuiert.

Im folgenden schreiben wir meistens nur $\circ$ für $\circ_{ABC}$, $\leftarrow$ für $\leftarrow_{ABC}$ und $\rightarrow$ für $\rightarrow_{ABC}$.

Bevor wir einige Folgerungen für die Residuale in Quantaloiden notieren, geben wir zwei wichtige Beispiele für Quantaloide.

Beispiel 2.3.26. Die 2-Kategorie Rel der Mengen und Relationen mit der Inklusionsordnung ist ein Quantaloid:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dd, dashed, "h \leftarrow f"] \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \\
 & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g"] & \\
 & C \\
A \arrow[uu, dashed, "g \to h"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2.1: Linkes und rechtes Residual der Komposition

Die geordneten Morphismenmengen $\mathsf{Rel}(X, Y) = \mathfrak{P}(X \times Y)$ sind vollständige Mengenverbände, und es gilt

$$
\begin{aligned}
\bigcup \mathcal{S} \circ R &= \bigcup \{ S \circ R : S \in \mathcal{S} \} \qquad && \text{für alle } R \in \mathsf{Rel}(X, Y),\ \mathcal{S} \subseteq \mathsf{Rel}(Y, Z), \\
S \circ \bigcup \mathcal{R} &= \bigcup \{ S \circ R : R \in \mathcal{R} \} \qquad && \text{für alle } \mathcal{R} \subseteq \mathsf{Rel}(X, Y),\ S \in \mathsf{Rel}(Y, Z).
\end{aligned}
$$

Man sieht leicht, dass die beiden Residuale der Komposition von Rel folgendermaßen gebildet werden: Für Relationen $R : X \rightharpoonup Y$, $S : Y \rightharpoonup Z$, $T : X \rightharpoonup Z$ ist $(T \leftarrow R) : Y \rightharpoonup Z$ bestimmt durch

$$T \leftarrow R = (T^{\mathrm{c}} \circ R^{\mathrm{d}})^{\mathrm{c}} = \{ (y, z) : \forall x (x \mathrel{R} y \Rightarrow x \mathrel{T} z) \} = \{ (y, z) : Ry \subseteq Tz \}$$

und $(S \to T) : X \rightharpoonup Y$ durch

$$S \to T = (S^{\mathrm{d}} \circ T^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = \{ (x, y) : \forall z (y \mathrel{S} z \Rightarrow x \mathrel{T} z) \} = \{ (x, y) : yS \subseteq xT \},$$

siehe beispielsweise [38, Theorem 1]. Es gilt

$$(T \leftarrow R)^{\mathrm{d}} = R^{\mathrm{d}} \to T^{\mathrm{d}} = R^{\mathrm{c}} \leftarrow T^{\mathrm{c}} \quad \text{und} \quad (S \to T)^{\mathrm{d}} = T^{\mathrm{d}} \leftarrow S^{\mathrm{d}} = T^{\mathrm{c}} \to S^{\mathrm{c}}$$

sowie $T \leftarrow R = T^{\mathrm{cd}} \to R^{\mathrm{cd}}$ und $S \to T = S^{\mathrm{cd}} \leftarrow T^{\mathrm{cd}}$.

Beispiel 2.3.27. Die Kategorie SL der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen ist ein Quantaloid:

Zunächst sind die Morphismenmengen $\mathsf{SL}(L, M) = \mathsf{res}(L; M)$ mit der punktweisen Ordnung von Funktionen vollständige Verbände (siehe Proposition 1.2.40). Da das Supremum $\bigvee$-erhaltender Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden punktweise gebildet wird, erhält man außerdem für jedes $x \in L$ und für alle $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{SL}(L, M)$, $g \in \mathsf{SL}(M, N)$

$$(g \circ \bigvee \mathcal{F})(x) = g(\bigvee \{ f(x) : f \in \mathcal{F} \}) = \bigvee \{ (g \circ f)(x) : f \in \mathcal{F} \} = (\bigvee \{ g \circ f : f \in \mathcal{F} \})(x),$$

sowie für alle $f \in \mathsf{SL}(L, M)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathsf{SL}(M, N)$

$$(\bigvee \mathcal{G} \circ f)(x) = (\bigvee \mathcal{G})(f(x)) = \bigvee \{ (g \circ f)(x) : g \in \mathcal{G} \} = (\bigvee \{ g \circ f : g \in \mathcal{G} \})(x).$$

Folglich ist die Komposition von SL in beiden Variablen $\bigvee$-erhaltend. Mit SL ist dann auch die isomorphe lokal geordnete 2-Kategorie $(\mathsf{SL}^{d})^{\mathrm{co\,op}}$ ein Quantaloid.

Ein Großteil der folgenden nützlichen Rechenregeln für Quantaloide ergibt sich unmittelbar aus den bekannten Eigenschaften zweistelliger residuierter Abbildungen.

Proposition 2.3.28. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Quantaloid, und seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon A \to C$ sowie $k\colon B \to D$, $l\colon D \to B$, $m\colon A \to E$, $n\colon E \to C$ $\mathcal{Q}$-Morphismen. Dann gilt*

$$g \circ f \leq h \quad \iff \quad g \leq h \leftarrow f \quad \iff \quad f \leq g \to h \tag{2.9}$$

und für alle $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q}(A,B)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{Q}(B,C)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Q}(A,C)$

$$\begin{aligned}(\textstyle\bigwedge \mathcal{H}) \leftarrow (\bigvee \mathcal{F}) &= \textstyle\bigwedge\{\, h' \leftarrow f : h' \in \mathcal{H},\ f' \in \mathcal{F}\,\},\\ (\textstyle\bigvee \mathcal{G}) \to (\bigwedge \mathcal{H}) &= \textstyle\bigwedge\{\, g' \to h : g' \in \mathcal{G},\ h' \in \mathcal{H}\,\}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\circ$ in beiden Variablen isoton, $\leftarrow$ ist in der ersten isoton und der zweiten antiton, und $\to$ ist in der ersten antiton und der zweiten isoton. Außerdem gilt:

(a)	$(h \leftarrow f) \circ f \leq h$	*(a')*	$g \circ (g \to h) \leq h$
(b)	$g \leq (g \circ f) \leftarrow f$	*(b')*	$f \leq g \to (g \circ f)$
(c)	$((g \circ f) \leftarrow f) \circ f = g \circ f$	*(c')*	$g \circ (g \to (g \circ f)) = g \circ f$
(d)	$((h \leftarrow f) \circ f) \leftarrow f = h \leftarrow f$	*(d')*	$g \to (g \circ (g \to h)) = g \to h$
(e)	$f \leq (h \leftarrow f) \to h$	*(e')*	$g \leq h \leftarrow (g \to h)$
(f)	$h \leftarrow ((h \leftarrow f) \to h) = h \leftarrow f$	*(f')*	$(h \leftarrow (g \to h)) \to h = g \to h$
(g)	$1_B \leq f \leftarrow f$	*(g')*	$1_A \leq f \to f$
(h)	$f \leftarrow 1_A = f$	*(h')*	$1_B \to f = f$
(i)	$f \leftarrow (f \to f) = f$	*(i')*	$(f \leftarrow f) \to f = f$
(j)	$(h \leftarrow f) \leftarrow k = h \leftarrow (k \circ f)$	*(j')*	$l \to (g \to h) = (g \circ l) \to h$
(k)	$(m \leftarrow h) \circ (h \leftarrow f) \leq m \leftarrow f$	*(k')*	$(g \to h) \circ (h \to n) \leq g \to n$
(l)	$k \circ (f \leftarrow h) \leq (k \circ f) \leftarrow h$	*(l')*	$(h \to g) \circ l \leq h \to (g \circ l)$
(m)	$h \leftarrow f \leq (h \circ d) \leftarrow (f \circ d)$	*(m')*	$g \to h \leq (e \circ g) \to (e \circ h)$.

Für alle $h\colon A \to C$ sind die Abbildungen

$$f \mapsto (h \leftarrow f) \to h \quad \text{und} \quad g \mapsto h \leftarrow (g \to h)$$

Hüllenoperationen auf $\mathcal{Q}(A,B)$ bzw. $\mathcal{Q}(B,C)$.

Beweis. Die Eigenschaften zu Beginn sind einfache Folgerungen daraus, dass $(\circ, \leftarrow, \to)$ eine $(+,+;+)$-residuierte Familie ist; die Aussagen (a)–(f) und (a')–(f') stammen aus Korollar 2.2.17.

Im Gegensatz dazu werden für die Beweise der übrigen Aussagen zusätzlich das Assoziativgesetz oder die Existenz von neutralen Elementen benötigt. Im folgenden werden nur die Aussagen für $\leftarrow$ gezeigt, die entsprechenden für $\to$ ergeben sich analog.

Zu (g). Aus $1_B \circ f = f \leq f$ folgt $1_B \leq f \leftarrow f$. Zu (h). Für jedes $a\colon A \to B$ gilt $a \leq f \leftarrow 1_A \Leftrightarrow a \circ 1_A \leq f \Leftrightarrow a \leq f$. Zu (i). Dies folgt aus (f) und (h). Zu (j). Für alle

$c\colon C \to D$ gilt

$$\begin{aligned} c \le (h \leftarrow f) \leftarrow k \quad &\iff \quad c \circ k \le h \leftarrow f \\ &\iff \quad c \circ k \circ f \le h \\ &\iff \quad c \le h \leftarrow (k \circ f). \end{aligned}$$

Zu (k). Laut (a) und der Isotonie von $\circ$ gilt $(m \leftarrow h) \circ (h \leftarrow f) \circ f \le (m \leftarrow h) \circ h \le m$, also die Behauptung. Zu (l). Nach (a) ist $(f \leftarrow h) \circ h \le f$, also $k \circ (f \leftarrow h) \circ h \le k \circ f$ und somit $k \circ (f \leftarrow h) \le (k \circ f) \leftarrow h$. Zu (m). Aus (a) folgt $(h \leftarrow f) \circ (f \circ d) \le h \circ d$ und daraus bereits die Behauptung. □

Proposition 2.3.29. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Quantaloid, und $f\colon A \to B$, $g\colon C \to B$, $h\colon C \to D$ seien $\mathcal{Q}$-Morphismen.*

(a) Es gilt die „Assoziativität“ für Residuale:

$$f \to (g \leftarrow h) = (f \to g) \leftarrow h.$$

(b) Aus $f = g \leftarrow (f \to g)$ und $h = (g \leftarrow h) \to g$ folgt

$$(g \leftarrow h) \to f = h \leftarrow (f \to g).$$

Beweis. Zu (a). Für alle $a\colon D \to A$ gilt

$$\begin{aligned} a \le f \to (g \leftarrow h) \quad &\iff \quad f \circ a \le g \leftarrow h \\ &\iff \quad f \circ a \circ h \le g \\ &\iff \quad a \circ h \le f \to g \\ &\iff \quad a \le (f \to g) \leftarrow h. \end{aligned}$$

Zu (b). Nach Voraussetzung und Teil (a) ergibt sich

$$\begin{aligned} (g \leftarrow h) \to f &= (g \leftarrow h) \to (g \leftarrow (f \to g)) = ((g \leftarrow h) \to g) \leftarrow (f \to g) \\ &= h \leftarrow (f \to g). \end{aligned}$$ □

Die nächste Proposition zeigt, dass Quantaloid-Äquivalenzen nicht nur die Komposition, sondern auch ihre Residuale bewahren.

Proposition 2.3.30. *Seien $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ Quantaloide und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon A \to C$ $\mathcal{Q}$-Morphismen. Für jeden Quantaloid-Homomorphismus $F\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ gilt*

$$F(h \leftarrow f) \le F(h) \leftarrow F(f) \quad \text{und} \quad F(g \to h) \le F(g) \to F(h).$$

Ist $F\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ eine Quantaloid-Äquivalenz, so ist

$$F(h \leftarrow f) = F(h) \leftarrow F(f) \quad \text{und} \quad F(g \to h) = F(g) \to F(h).$$

Beweis. Sei F ein isotoner Funktor. Wegen $(h \leftarrow f) \circ f \leq h$ folgt dann $F(h \leftarrow f) \circ F(f) \leq F(h)$, also $F(h \leftarrow f) \leq F(h) \leftarrow F(f)$.

Ist F eine Quantaloid-Äquivalenz, so sind nach Korollar 2.3.24 und Proposition 2.3.8 sämtliche Abbildungen $F_{A'A''}$ Ordnungsisomorphismen. Für jedes $k \colon B \to C$ gilt in diesem Fall also

$$\begin{aligned} F(k) \leq F(h) \leftarrow F(f) \quad &\iff \quad F(k \circ f) = F(k) \circ F(f) \leq F(h) \\ &\iff \quad k \circ f \leq h \\ &\iff \quad k \leq h \leftarrow f \\ &\iff \quad F(k) \leq F(h \leftarrow f) \end{aligned}$$

und mit $F(k) = F(h) \leftarrow F(f)$ folglich $F(h) \leftarrow F(f) \leq F(h \leftarrow f)$. Die Aussagen für $\rightarrow$ ergeben sich analog. □

Wir betrachten noch speziell das Quantaloid Rel und zeigen, wie Quasiordnungen durch den Einsatz von Residualen der Relationen-Komposition charakterisiert werden können.

Lemma 2.3.31. *Seien X, Y Mengen. Für jede Relation $R : X \rightharpoondown Y$ ist $R \rightarrow R$ eine Quasiordnung auf X und $R \leftarrow R$ eine Quasiordnung auf Y.*

Beweis. Nach Proposition 2.3.28 gilt im Quantaloid Rel insbesondere $1_X \subseteq R \rightarrow R$ und $(R \rightarrow R) \circ (R \rightarrow R) \subseteq R \rightarrow R$, also ist $R \rightarrow R$ reflexiv und transitiv (siehe Lemma 1.1.4). Analog folgt die Behauptung für $R \leftarrow R$. □

Proposition 2.3.32. *Für jede Relation R auf einer Menge X gilt:*

$$R \text{ ist eine Quasiordnung} \quad \iff \quad R \rightarrow R = R \quad \iff \quad R \leftarrow R = R.$$

Beweis. Ist R eine Quasiordnung, so gilt $1_X \subseteq R$ und $R \circ R \subseteq R$, also $R = 1_X \rightarrow R \supseteq R \rightarrow R$ und $R \subseteq R \rightarrow R$. Umgekehrt folgt aus $R \rightarrow R = R$ nach Lemma 2.3.31, dass R eine Quasiordnung ist. Analog für $R \leftarrow R$. □

Abschließend skizzieren wir, wie die in diesem Abschnitt eingeführten Begriffe mit sogenannten $\mathcal{V}$-Kategorien zusammenhängen. In dieser Terminologie sind insbesondere lokal geordnete 2-Kategorien dasselbe wie Pos-Kategorien, und Quantaloide entsprechen genau den SL-Kategorien.

Bemerkung 2.3.33. Quantaloide, lokal geordnete 2-Kategorien und auch beliebige 2-Kategorien lassen sich einheitlich in der Theorie der *angereicherten Kategorien* behandeln. Angereicherten Kategorien liegt im wesentlichen die Idee zugrunde, in der Definition 1.3.1 von Kategorien die Morphismenmengen (also Objekte von Set) durch die Objekte einer anderen Kategorie $\mathcal{V}$ zu ersetzen und ebenso die Kompositionsabbildungen (Morphismen von Set) durch Morphismen aus $\mathcal{V}$. Dies führt auf sogenannte *$\mathcal{V}$-Kategorien.* Für eine brauchbare Theorie der $\mathcal{V}$-Kategorien sollte $\mathcal{V}$ mindestens eine *monoidale* Kategorie sein (mit einem *Tensorprodukt*-Funktor $\otimes \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, einem *neutralen Element* $I \in |\mathcal{V}|$ und geeigneten natürlichen Isomorphismen). Um die Theorie der $\mathcal{V}$-angereicherten Kategorien in weiten Teilen parallel zur gewöhnlichen Kategorientheorie entwickeln zu können, benötigt man darüber hinaus *abgeschlossene, symmetrische monoidale* Kategorien $\mathcal{V}$. Jede *kartesisch abgeschlossene* Kategorie ist insbesondere eine solche. Das Standardwerk zur Theorie der angereicherten

Kategorien ist [58], eine kurze Einführung liefern [14] und [13]. Ein wegweisender Artikel zu diesem Thema ist außerdem [64].

Für den Fall $\mathcal{V} = \mathsf{Set}$ sind $\mathcal{V}$-Kategorien dasselbe wie gewöhnliche Kategorien. Eine 2-*Kategorie* ist hingegen eine über Cat angereicherte Kategorie; die Komponenten $\mathcal{C}(A, B)$ einer 2-Kategorie $\mathcal{V}$ sind somit kleine Kategorien, und die Kompositionsabbildungen sind Bifunktoren. Mit natürlichen Transformationen als Morphismen zwischen Funktoren wird Cat selbst zu einer 2-Kategorie (mit $\mathsf{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$), vergleiche die kategorientheoretischen Grundlagen ab Definition 1.3.5. Eine 2-Kategorie $\mathcal{C}$ ist nun *lokal geordnet*, wenn die kleinen Kategorien $\mathcal{C}(A, B)$ geordnete Mengen sind (aufgefasst als Kategorien). Auf diese Weise ergibt sich die in Definition 2.3.1 gegebene Beschreibung lokal geordneter 2-Kategorien; die Isotonie der Kompositionsabbildungen entspricht gerade der Funktor-Eigenschaft. *Bikategorien* sind eine Verallgemeinerung von 2-Kategorien (siehe [4] oder auch [12] und [62]) und werden auch *schwache* 2-Kategorien genannt. Lokal geordnete Bikategorien sind jedoch dasselbe wie lokal geordnete 2-Kategorien und wurden deshalb zu Beginn des Abschnitts als gleichwertige Bezeichnung für letztere eingeführt.

Die Kategorie Pos der geordneten Mengen und isotonen Abbildungen ist kartesisch abgeschlossen, und durch den Begriff der Pos-Kategorie erhält man eine weitere Beschreibung lokal geordneter 2-Kategorien. Mit dem üblichen Tensorprodukt vollständiger Verbände erweist sich die Kategorie SL der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen als abgeschlossene, symmetrische monoidale Kategorie, und SL-Kategorien entsprechen gerade den Quantaloiden. Ein weiteres einfaches Beispiel liefert der zweielementige Verband $\mathbf{2}$ (aufgefasst als kartesisch abgeschlossene Kategorie mit dem binären Infimum als Tensorprodukt): Eine über $\mathbf{2}$ angereicherte Kategorie ist nichts anderes ist als eine quasigeordnete Menge, siehe auch Beispiel 1.3.3. Es lässt sich zeigen, dass jede abgeschlossene, symmetrische monoidale Kategorie $\mathcal{V}$ selbst wieder eine $\mathcal{V}$-Kategorie ist. Damit ergibt sich erneut, dass Pos eine lokal geordnete 2-Kategorie und SL ein Quantaloid ist.

Die in der Theorie der $\mathcal{V}$-Kategorien entwickelten Termini $\mathcal{V}$-Funktor, $\mathcal{V}$-natürliche Transformation, $\mathcal{V}$-Isomorphismus, $\mathcal{V}$-Äquivalenz etc. ergeben in den jeweiligen Spezialfällen für $\mathcal{V}$ die in diesem Abschnitt und früher eingeführten Definitionen. Beispielsweise ist ein Set-Funktor ein gewöhnlicher Funktor, ein 2-Funktor (allgemein definiert als Cat-Funktor) zwischen lokal geordneten 2-Kategorien ist dasselbe wie ein Pos-Funktor, und Quantaloid-Homomorphismen entsprechen genau den SL-Funktoren. Eine Pos-natürliche Transformation unterscheidet sich nicht von einer gewöhnlichen natürlichen Transformation, weswegen für diese keine eigene Bezeichnung festgelegt wurde. Analoges gilt für SL-natürliche Transformationen.

Schließlich sei erwähnt, dass sämtliche in dieser Arbeit vorkommenden Begriffe von Adjunktionen unter eine sehr allgemeine Definition von adjungierten Paaren in beliebigen 2-Kategorien (oder noch allgemeiner: Bikategorien) subsumiert werden können. Adjunktionen in 2-Kategorien erhält man, indem die in Definition 1.3.8 für Kategorien und Funktoren erklärte Variante nahezu wörtlich auf 2-Kategorien übertragen wird. Dies wird zum Beispiel in [63], [12] oder [49] ausgeführt. Für lokal geordnete 2-Kategorien ergibt sich dann die Fassung aus Definition 2.3.9. Eine moderne Einführung in die (kategorielle) Ordnungstheorie mit dem Leitmotiv der Adjunktionen und der Betrachtung einiger der genannten Bikategorien gibt [88].

3 Superalgebraische Verbände

Superalgebraische Verbände sind bis auf Isomorphie gerade die Abschnittsverbände. Es wird sich herausstellen, dass superalgebraische Verbände genau den richtigen Ausgangspunkt für die weitere Theorie der allgemeinen Residuiertheit bilden. Dies gilt sowohl für die Realisierung $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen durch geeignete Relationen in diesem Kapitel als auch für die Untersuchung $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen und ihren Hüllenbereichen in Kapitel 5. Ein entscheidendes Hilfsmittel wird dabei sein, dass jede isotone Abbildung $f\colon L \to M$ zwischen superalgebraischen Verbänden auf eindeutige Weise zu einer residuierten Abbildung $\tilde{f}\colon L \to M$ „geglättet“ werden kann, die mit f auf der Basis (dem $\bigvee$-Spektrum) von L übereinstimmt.

Bevor wir solche Glättungen allgemeiner für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen behandeln, werden zunächst alle benötigten Grundlagen und Notationen zu superalgebraischen Verbänden und ihren Spektren eingeführt. Im Anschluss an die Glättung von Abbildungen betrachten wir eine wichtige Klasse von Relationen zwischen quasigeordneten Mengen, die sogenannten Abschnittsrelationen. Es wird unter anderem gezeigt, wie sich $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden durch $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen zwischen den zugehörigen $\bigvee$-Spektren darstellen lassen. Speziell ergibt sich daraus die (aus anderen Zusammenhängen bekannte) Äquivalenz des Quantaloids der Abschnittsrelationen mit dem Quantaloid der superalgebraischen Verbände und residuierten Abbildungen.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden dann $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Potenzmengenverbänden thematisiert. Da Potenzmengenverbände insbesondere superalgebraisch sind, können die zuvor erzielten Ergebnisse auf diesen Fall angewendet werden. Ohne größeren Aufwand erhalten wir damit eine Verallgemeinerung der geläufigen Korrespondenz von Axialitäten bzw. Polaritäten mit Relationen, welche eine wichtige Voraussetzung für die spätere Betrachtung von Relationen zwischen Hüllenräumen darstellt.

3.1 Grundlagen und Glättungen

Die ohne Beweis notierten Fakten dieses Abschnitts sind allesamt wohlbekannt. Für Hintergründe zu superalgebraischen Verbänden (A-Verbänden), volldistributiven Verbänden und weiteren erwähnten Begriffen verweisen wir auf [17] sowie auf [24, 27, 30]. Eine Fülle von zugehörigem Material findet sich auch in [31, 33, 40] im allgemeineren Rahmen der mit sogenannten Teilmengenauswahlen $\mathcal{Z}$ erweiterten „$\mathcal{Z}$-Begriffe“.

3.1.1 Spektren vollständiger Verbände

Wir betonen gleich zu Beginn, dass unter dem *Spektrum* eines vollständigen Verbandes im folgenden stets sein $\bigvee$-Spektrum verstanden wird. In der Literatur ist mit dem Spektrum dagegen meistens das $\wedge$-Spektrum gemeint (vergleiche etwa [47]), welches im folgenden jedoch gar keine Rolle spielt und insofern keinen Anlass zur Verwechslung liefert.

Definition 3.1.1 ($\bigvee$-prime Elemente und Spektren)**.** Sei L ein vollständiger Verband. Ein Element $u \in L$ heißt $\bigvee$*-prim*, falls für alle $A \subseteq L$ gilt:

$$u \leq \bigvee_L A \quad \Longrightarrow \quad u \in {\downarrow_L} A.$$

Dual werden $\bigwedge$*-prime* Elemente von L definiert.

Die Menge aller $\bigvee$-primen Elemente von L heißt $\bigvee$*-Spektrum* (oder einfach *Spektrum*) von L und wird mit $\mathcal{S}_+L$ oder $\mathcal{S}L$ bezeichnet. Die Menge aller $\bigwedge$-primen Elemente von L wird $\bigwedge$*-Spektrum* von L genannt und mit $\mathcal{S}_-L$ bezeichnet.

Es stehe $\mathfrak{S}_+L$ und auch $\mathfrak{S}L$ für die geordnete Menge $(\mathcal{S}_+L, \leq) = (\mathcal{S}L, \leq)$, wobei $\leq$ die durch L induzierte Ordnung auf $\mathcal{S}_+L$ ist. Analog sei $\mathfrak{S}_-L$ die geordnete Menge $(\mathcal{S}_-L, \leq)$ mit der durch L induzierten Ordnung. Für jedes Vorzeichen $\sigma \in \{+, -\}$ ist somit

$$\mathcal{S}_\sigma L = \mathcal{S}L^\sigma \quad \text{und} \quad (\mathfrak{S}_\sigma L)^\sigma = \mathfrak{S}L^\sigma.$$

Wir dehnen diese Schreibweisen auch auf Familien $L = (L_1, \ldots, L_n)$ vollständiger Verbände L_i aus: Für $\sigma \in \{+, -\}^n$ sei

$$\mathcal{S}_\sigma L = (\mathcal{S}_{\sigma_1} L_1, \ldots, \mathcal{S}_{\sigma_n} L_n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_\sigma L = (\mathfrak{S}_{\sigma_1} L_1, \ldots, \mathfrak{S}_{\sigma_n} L_n).$$

Damit ist $\mathcal{S}_\sigma L = \mathcal{S}_{[+]} L^\sigma = \mathcal{S}^n L^\sigma$ und $(\mathfrak{S}_\sigma L)^\sigma = \mathfrak{S}_{[+]} L^\sigma = \mathfrak{S}^n L^\sigma$.

Das kleinste Element $\perp_L$ eines vollständigen Verbandes L ist offensichtlich niemals $\bigvee$-prim. Aus der Definition $\bigvee$-primer Elemente folgt außerdem für jedes $A \subseteq L$ die nützliche Identität

$$({\downarrow_L} \textstyle\bigvee_L A) \cap \mathcal{S}L = ({\downarrow_L} A) \cap \mathcal{S}L.$$

Wir notieren einige bekannte Aussagen zu $\bigvee$-primen Elementen vollständiger Verbände.

Lemma 3.1.2. *Jedes $\bigvee$-prime Element ist auch $\bigvee$-irreduzibel.* □

In vollständigen Heyting-Algebren (Rahmen, Lokalen) gilt hiervon auch die Umkehrung.

Lemma 3.1.3. *Sei L ein vollständiger Verband. Ein Element u aus L ist genau dann $\bigvee$-prim, wenn*

$$L \setminus {\uparrow_L} u = {\downarrow_L} w$$

für ein $w \in L$ gilt (und $w = \max(L \setminus {\uparrow_L} u)$ ist darüber hinaus $\bigwedge$-prim). □

Demnach treten $\bigvee$- und $\bigwedge$-prime Elemente stets in Paaren auf, die den vollständigen Verband L in der angegebenen Weise zerlegen.

Theorem 3.1.4. *Für jeden vollständigen Verband L sind die geordneten Mengen $\mathfrak{S}_+L$ und $\mathfrak{S}_-L$ isomorph vermöge der zueinander inversen Isomorphismen $u \mapsto \max(L \setminus {\uparrow} u)$ und $v \mapsto \min(L \setminus {\downarrow} v)$.* □

Für die Identität auf $\mathfrak{S}L$ und den Isomorphismus $u \mapsto \max(L \setminus {\uparrow} u)$ zwischen $\mathfrak{S}L$ und $\mathfrak{S}_-L$ führen wir eine im folgenden häufig verwendete Vorzeichen-Schreibweise ein.

Definition 3.1.5 (Zuordnung für Elemente des Spektrums)**.** Sei L ein vollständiger Verband und $\sigma \in \{+,-\}$ ein Vorzeichen. Für $u \in \mathcal{S}L$ sei u^σ definiert durch

$$u^+ := u \in \mathcal{S}_+L \quad \text{und} \quad u^- := \max(L \setminus {\uparrow_L} u) \in \mathcal{S}_-L.$$

Wir erweitern diese Notation auch auf den mehrstelligen Fall. Sei $L = (L_1, \ldots, L_n)$ eine Familie vollständiger Verbände und $\sigma \in \{+,-\}^n$. Für $u \in \prod \mathcal{S}^n L = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}L_i$ sei $u^\sigma \in \prod \mathcal{S}_\sigma L = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_{\sigma_i} L_i$ festgelegt durch

$$u^\sigma = (u_1^{\sigma_1}, \ldots, u_n^{\sigma_n}).$$

Konvention 3.1.6 (Elemente des Spektrums)**.** Sei $L = (L_1, \ldots, L_n)$ eine Familie vollständiger Verbände und $\sigma \in \{+,-\}^n$. Wird im folgenden $u^\sigma \in \prod \mathcal{S}_\sigma L$ geschrieben, so setzen wir stets voraus, dass $u \in \prod \mathcal{S}^n L$ gilt.

Mit der Bezeichnung $u^- = \max(L \setminus {\uparrow_L} u)$ ist für jeden vollständigen Verband L und jedes $u \in \mathcal{S}L$ also

$$L \setminus {\uparrow_L} u = {\downarrow_L} u^-.$$

Da $u \mapsto u^-$ ein Ordnungsisomorphismus von $\mathfrak{S}_+L$ in $\mathfrak{S}_-L$ ist, gilt insbesondere

$$u \leq_L v \quad \Longleftrightarrow \quad u^\sigma \leq_L v^\sigma$$

für alle $u, v \in \mathcal{S}L$. Darüber hinaus vermerken wir für spätere Umformungen:

Lemma 3.1.7. *Seien L ein vollständiger Verband und $\sigma \in \{+,-\}$. Für alle $u \in \mathcal{S}L$ und alle $x \in L$ gilt:*

$$u^\sigma \leq_L^\sigma x \quad \Longleftrightarrow \quad \text{nicht } (u^{-\sigma} \leq_L^{-\sigma} x).$$

Beweis. Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} u \leq x \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in {\uparrow} u \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin L \setminus {\uparrow} u = {\downarrow} u^- \quad \Longleftrightarrow \quad \text{nicht } (x \leq u^-) \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{nicht } (u^- \leq^- x) \end{aligned}$$

und damit natürlich auch $u^- \leq^- x \Leftrightarrow \text{nicht } (u \leq x)$. □

3.1.2 Superalgebraische Verbände

Superalgebraische Verbände sind die $\bigvee$-prim erzeugten vollständigen Verbände:

Definition 3.1.8 (Superalgebraische Verbände)**.** Ein vollständiger Verband L heißt *superalgebraisch* oder auch *A-Verband*, falls jedes Element von L Supremum von $\bigvee$-primen Elementen ist, d. h. das Spektrum $\mathcal{S}L$ ist ein $\bigvee$-Erzeuger von L.

Die Eigenschaft, ein superalgebraischer Verband zu sein, ist selbstdual: Das $\bigvee$-Spektrum eines vollständigen Verbands L ist genau dann ein $\bigvee$-Erzeuger von L, wenn das $\bigwedge$-Spektrum ein $\bigwedge$-Erzeuger ist.

Da $\bigvee$-prime Elemente außerdem $\bigvee$-irreduzibel sind, ist das Spektrum eines superalgebraischen Verbands L gerade seine Basis (der kleinste $\bigvee$-Erzeuger), es gilt also

$$\mathcal{S}L = \mathcal{S}_+L = \mathcal{J}L \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_-L = \mathcal{M}L.$$

Für endliche Verbände sind die superalgebraischen genau die distributiven (siehe Theorem 3.1.13). Insbesondere sind der einelementige Verband **1** und der zweielementige **2** superalgebraisch. Weitere wichtige Beispiele superalgebraischer Verbände erhält man durch die Abschnittsverbände:

Beispiel 3.1.9. Für jede quasigeordnete Menge P ist der Abschnittsverband $\mathfrak{A}P = (\mathcal{A}P, \subseteq)$ ein superalgebraischer Verband, dessen Spektrum aus den Hauptidealen von P besteht. Für jedes $x \in P$ berechnet man $(\downarrow_P x)^- = P \setminus \uparrow_P x = -\uparrow_P x$. Es ist also

$$\mathcal{S}_+\mathfrak{A}P = \{\, \downarrow_P x : x \in P \,\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_-\mathfrak{A}P = \{\, P \setminus \uparrow_P x : x \in P \,\},$$

und für jedes Vorzeichen $\sigma \in \{+, -\}$ ergibt sich die Identität

$$(\downarrow_P x)^\sigma = \sigma \downarrow_P^\sigma x.$$

Damit gilt für jeden unteren Abschnitt $D \in \mathfrak{A}P$

$$(\downarrow_P x)^\sigma \subseteq^\sigma D \iff \downarrow_P^\sigma x \subseteq \sigma D \iff x \in \sigma D.$$

Das Spektrum als geordnete Menge ist $\mathfrak{S}\mathfrak{A}P = \mathfrak{S}_+\mathfrak{A}P = (\{\, \downarrow_P x : x \in P \,\}, \subseteq)$, und es gilt

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}(P^{\mathrm{op}}) \cong (\mathfrak{S}\mathfrak{A}P)^{\mathrm{op}}.$$

Beispiel 3.1.10. Jeder Potenzmengenverband ist nach dem vorigen Beispiel superalgebraisch, denn ein Potenzmengenverband lässt sich stets als Abschnittsverband einer Antikette auffassen. Für jede Menge X ist $\mathfrak{P}X = \mathfrak{A}(X, =)$ und somit

$$\mathcal{S}_+\mathfrak{P}X = \{\, \{x\} : x \in X \,\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_-\mathfrak{P}X = \{\, X \setminus \{x\} : x \in X \,\}.$$

Es ist $\{x\}^- = X \setminus \{x\} = -\{x\}$ für alle $x \in X$, also

$$\{x\}^\sigma = \sigma\{x\}$$

für jedes Vorzeichen $\sigma \in \{+, -\}$. Damit ergibt sich für alle $A \subseteq X$ die später nützliche Beziehung

$$\{x\}^\sigma \subseteq^\sigma A \iff \sigma\{x\} \subseteq^\sigma A \iff x \in \sigma A. \tag{3.1}$$

Die folgenden, auf das Spektrum eines vollständigen Verbands eingeschränkten Supremums- und Hauptideal-Abbildungen werden noch an verschiedenen Stellen benötigt.

Definition 3.1.11 (Hüllen und Kerne)**.** Sei L ein beliebiger vollständiger Verband. Die *Kern-Abbildung* zu L sei die Restriktion der Supremumsabbildung von L auf $\mathfrak{P}\mathcal{S}L$, bezeichnet mit

$$\mathsf{j}_L \colon \mathfrak{P}\mathcal{S}L \to L, \qquad \mathsf{j}_L(A) = \textstyle\bigvee_L A.$$

Unter der *Hüllen-Abbildung* zu L verstehen wir die beschränkte Hauptideal-Abbildung

$$\mathsf{a}_L \colon L \to \mathfrak{P}\mathcal{S}L, \qquad \mathsf{a}_L(x) = \downarrow_L x \cap \mathcal{S}L.$$

Die Bilder $\mathsf{a}_L(x)$ werden *Hüllen* und die Bilder $\mathsf{j}_L(A)$ werden *Kerne* genannt.

Offensichtlich ist $\mathsf{a}_L(x)$ für jedes $x \in L$ ein unterer Abschnitt von $\mathfrak{S}L$, d. h. $\downarrow_{\mathfrak{S}L} \circ\, \mathsf{a}_L = \mathsf{a}_L$. Außerdem ist $\mathsf{j}_L \circ \downarrow_{\mathfrak{S}L} = \mathsf{j}_L$.

Die Restriktion von j_L auf $\mathfrak{A}\mathfrak{S}L$ wird mit $\mathsf{j}_L^\downarrow \colon \mathfrak{A}\mathfrak{S}L \to L$ bezeichnet und die Co-Restriktion von a_L auf $\mathfrak{A}\mathfrak{S}L$ mit $\mathsf{a}_L^\downarrow \colon L \to \mathfrak{A}\mathfrak{S}L$. Definitionsgemäß ist dann $\mathsf{j}_L^\downarrow = \mathsf{j}_L \circ \downarrow_{\mathfrak{S}L}^\circ$ und $\mathsf{a}_L^\downarrow = \downarrow_{\mathfrak{S}L}^\bullet \circ\, \mathsf{a}_L$.

Die Bezeichnungen *Kern* bzw. *Hülle* gehen hier zurück auf analog gebildete Funktionen im Falle der dualen Ordnung und $\wedge$-Spektren, siehe etwa [47]. Aus dem nächsten Lemma folgt, dass im Falle superalgebraischer Verbände L tatsächlich $\{\,\mathsf{a}_L(x) : x \in L\,\}$ ein Hüllensystem auf dem Spektrum $\mathcal{S}L$ und trivialerweise $\{\,\mathsf{j}_L(A) : A \subseteq \mathcal{S}L\,\} = |L|$ ein Kernsystem von L (d. h. ein Hüllensystem von L^{op}) ist.

Lemma 3.1.12. *Sei L ein superalgebraischer Verband. Es gilt*

$$\mathrm{id}_{\mathfrak{P}\mathcal{S}L} \leq \mathsf{a}_L \circ \mathsf{j}_L = {\downarrow_{\mathfrak{S}L}} \quad \textit{und} \quad \mathsf{j}_L \circ \mathsf{a}_L = \mathrm{id}_L,$$

also ist $(\mathsf{j}_L, \mathsf{a}_L)$ ein adjungiertes Paar, j_L surjektiv und a_L injektiv. Darüber hinaus ist neben j_L auch a_L residuiert.

Beweis. Die Funktionen j_L und a_L sind offensichtlich isoton. Da $\mathcal{S}L$ ein $\bigvee$-Erzeuger von L ist, gilt einerseits $\mathsf{j}_L \circ \mathsf{a}_L = \mathrm{id}_L$. Andererseits ist für alle $U \subseteq \mathcal{S}L$

$$U \subseteq {\downarrow_{\mathfrak{S}L}} U = ({\downarrow_L} U) \cap \mathcal{S}L = ({\downarrow_L} \textstyle\bigvee_L U) \cap \mathcal{S}L = (\mathsf{a}_L \circ \mathsf{j}_L)(U),$$

also $\mathrm{id}_{\mathfrak{P}\mathcal{S}L} \leq {\downarrow_{\mathfrak{S}L}} = \mathsf{a}_L \circ \mathsf{j}_L$. Für jedes $A \subseteq L$ gilt schließlich

$$\mathsf{a}_L(\textstyle\bigvee_L A) = ({\downarrow_L} \textstyle\bigvee_L A) \cap \mathcal{S}L = ({\downarrow_L} A) \cap \mathcal{S}L = \bigcup\{\,{\downarrow_L} x \cap \mathcal{S}L : x \in A\,\} = \bigcup \mathsf{a}_L[A],$$

d. h. a_L erhält beliebige Suprema. □

Entsprechende Aussagen ergeben sich damit auch für die isotonen Abbildungen $\mathsf{j}_L^{\downarrow}$ und $\mathsf{a}_L^{\downarrow}$. Neben $\mathsf{j}_L^{\downarrow} \circ \mathsf{a}_L^{\downarrow} = \mathrm{id}_L$ gilt hier sogar $\mathsf{a}_L^{\downarrow} \circ \mathsf{j}_L^{\downarrow} = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}\mathfrak{S}L}$. Für jeden superalgebraischen Verband L sind demzufolge die Abbildungen $\mathsf{j}_L^{\downarrow}$ und $\mathsf{a}_L^{\downarrow}$ zueinander inverse Ordnungsisomorphismen, also $L \cong \mathfrak{A}\mathfrak{S}L$.

Da Abschnittsverbände stets superalgebraisch sind, erhält man natürlich auch die Umkehrung: Ist L ein vollständiger Verband und $\mathsf{j}_L^{\downarrow}$ ein Isomorphismus, so ist L superalgebraisch. Dies vermerken wir zusammen mit einer weiteren Charakterisierung superalgebraischer Verbände im nächsten Theorem.

Theorem 3.1.13. *Für jeden vollständigen Verband L sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(1) L ist superalgebraisch.

(2) L ist algebraisch und volldistributiv.

(3) L ist isomorph zu einem Abschnittsverband einer geordneten Menge.

(4) Die Abbildung $\mathsf{j}_L^{\downarrow} \colon \mathfrak{A}\mathfrak{S}L \to L$ ist ein Isomorphismus (mit der Inversen $\mathsf{a}_L^{\downarrow}$). □

Algebraische Verbände sind bekanntlich die kompakt erzeugten vollständigen Verbände (wobei ein Element u eines vollständigen Verbandes L *kompakt* ist, wenn für jedes $A \subseteq L$ mit $u \leq \bigvee A$ bereits $u \leq \bigvee F$ für ein endliches $F \subseteq A$ gilt). Sie lassen sich auch als diejenigen vollständigen Verbände charakterisieren, die isomorph zum Unteralgebrenverband einer Algebra sind (im Sinne der Universellen Algebra mit finitären Operationen). Werden dabei nur Algebren mit *unären* Operationen betrachtet, so ergeben sich wiederum genau die superalgebraischen Verbände.

Aus dem obigen Theorem folgt insbesondere, dass jeder superalgebraische Verband eine vollständige Heyting-Algebra ist. Für Produkte superalgebraischer Verbände stellen wir fest (vergleiche auch Lemma 1.2.18):

Lemma 3.1.14. *Das Produkt superalgebraischer Verbände ist wieder superalgebraisch. Ist $L = (\, L_i : i \in I\,)$ eine Familie superalgebraischer Verbände, so ist das Spektrum von $\prod L$ gegeben durch*

$$\mathcal{S} \prod L = \{\, \bot_{\prod L}[i \mapsto u_i] : i \in I \;\&\; u_i \in \mathcal{S}L_i \,\},$$

wobei $\bot_{\prod L} = (\, \bot_{L_i} : i \in I\,)$ ist. □

Man beachte für eine Familie $L = (L_1, \dots, L_n)$ superalgebraischer Verbände den Unterschied von $\mathcal{S} \prod L$ (dem Spektrum des Produkts) und $\prod \mathcal{S}^n L = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}L_i$ (dem Produkt der einzelnen Spektren). Für jedes $\sigma \in \{+, -\}^n$ ist zwar $\mathcal{S}_\sigma L$ stets ein σ-Erzeuger von L, aber $\prod \mathcal{S}_{[+]} L = \prod \mathcal{S}^n L$ ist im allgemeinen *nicht* das Spektrum von $\prod L$.

Wir führen abschließend noch verschiedene lokal geordnete 2-Kategorien superalgebraischer Verbände ein (jeweils mit der punktweisen Ordnung von Abbildungen) und beginnen dafür mit der naheliegenden Definition spektrumserhaltender Abbildungen.

Definition 3.1.15 (Spektrumserhaltende Abbildungen)**.** Eine Abbildung $f\colon L \to M$ zwischen superalgebraischen Verbänden heißt *spektrumserhaltend*, falls $f[\mathcal{S}L] \subseteq \mathcal{S}M$ gilt.

Für superalgebraische Verbände besteht der folgende bekannte Zusammenhang zwischen spektrumserhaltenden, residuierten Abbildungen und vollständigen Homomorphismen:

Proposition 3.1.16. *Eine residuierte Abbildung $f\colon L \to M$ zwischen superalgebraischen Verbänden ist genau dann spektrumserhaltend, wenn ihre obere Adjungierte $f^*\colon M \to L$ residuiert, also ein vollständiger Homomorphismus ist.* □

Mit anderen Worten: Zwischen superalgebraischen Verbänden sind die spektrumserhaltenden, residuierten Abbildungen gerade die doppelt residuierten.

Definition 3.1.17 (Kategorien superalgebraischer Verbände)**.** Es sei AL die Kategorie der superalgebraischen Verbände und residuierten Abbildungen. Als volle Unterkategorie von SL ist AL ein Quantaloid.

$\mathsf{AL}^\vee$ sei die Kategorie der superalgebraischen Verbände und residuierten, spektrumserhaltenden Abbildungen. Als Unterkategorie von AL ist $\mathsf{AL}^\vee$ eine lokal geordnete 2-Kategorie.

Schließlich bezeichne ACL die Kategorie der superalgebraischen Verbände und vollständigen Homomorphismen. Auch diese ist eine lokal geordnete 2-Kategorie, da sie eine (volle) Unterkategorie von CL ist.

Nach Proposition 3.1.16 sind die spektrumserhaltenden, residuierten Abbildungen genau die co-adjungierten Morphismen in AL, es gilt also

$$\mathsf{AL}^\vee = \text{Co-Adj}(\mathsf{AL}) \cong \text{Adj}(\mathsf{AL})^{\text{co op}} = (\mathsf{ACL})^{\text{co op}},$$

vergleiche auch Korollar 2.3.13. Die bekannte Äquivalenz der Kategorien $\mathsf{AL}^\vee$ und Pos wird in Theorem 3.2.18 behandelt.

3.1.3 Glättung von Abbildungen

Aus der Theorie der Vektorräume ist bekannt, dass eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen Vektorräumen durch ihre Werte auf einer Basis B von V bereits vollständig festgelegt ist und sich außerdem jede Abbildung $g\colon B \to W$ eindeutig zu einer linearen

Abbildung von V in W fortsetzen lässt. Ein analoger Sachverhalt gilt für superalgebraische Verbände: Eine residuierte Abbildung $f\colon L \to M$ zwischen superalgebraischen Verbänden ist durch ihre Bilder auf dem Spektrum $\mathfrak{S}L$ bereits vollständig bestimmt (da das Spektrum ein $\bigvee$-Erzeuger ist), und jede isotone Abbildung $g\colon \mathfrak{S}L \to M$ lässt sich eindeutig zu einer residuierten Abbildung von L in M fortsetzen.

Anders ausgedrückt, kann für superalgebraische Verbände L und M jedes $f\colon L \to M$ mit isotoner Restriktion $f \restriction \mathfrak{S}L$ auf genau eine Weise derart geglättet werden, dass die resultierende Abbildung $\tilde{f}\colon L \to M$ residuiert ist und auf $\mathfrak{S}L$ mit f übereinstimmt. Dies lässt sich auf mehrstellige Abbildungen und beliebige Signaturen $(\sigma;\tau)$ verallgemeinern. Die im folgenden näher beschriebene $(\sigma;\tau)$-Glättung von Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden ist im Gegensatz zur vorher erwähnten eindeutigen Fortsetzung keine aus der einschlägigen Literatur bekannte Notation und wird sich im weiteren Verlauf als wichtiges Hilfsmittel erweisen.

Definition 3.1.18 ($(\sigma;\tau)$-Glättung von Abbildungen)**.** Es sei $(L;M) = (L_1,\dots,L_n;M)$ eine Familie beliebiger vollständiger Verbände und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ eine Signatur. Für eine n-stellige Abbildung $f\colon L \to M$ sei die n-stellige Abbildung $f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}\colon L \to M$, die $(\sigma;\tau)$-*Glättung* von f, definiert durch

$$\begin{aligned} f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}(x) &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, f(b) : b \in \textstyle\prod \mathcal{S}_{\sigma}L \;\&\; b \leq^{\sigma}_{L} x \,\} \\ &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} f[{\downarrow}^{\sigma_1}_{L_1} x_1 \cap \mathcal{S}_{\sigma_1}L_1, \dots, {\downarrow}^{\sigma_n}_{L_n} x_n \cap \mathcal{S}_{\sigma_n}L_n]. \end{aligned}$$

Für $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ schreiben wir auch $f^{\sim}$ oder $\tilde{f}$ anstelle von $f^{\sim}_{([+];+)}$. Im wichtigen Fall $n = 1$ und $(\sigma;\tau) = (+;+)$ ist dann

$$\tilde{f}(x) = \bigvee\nolimits_{M} \{\, f(u) : x \geq_L u \in \mathcal{S}L \,\} = \bigvee\nolimits_{M} f[{\downarrow}_L x \cap \mathcal{S}L].$$

Mit den Ordnungsisomorphismen $(\,\cdot\,)^{-}$ zwischen $\bigvee$- und $\bigwedge$-Spektrum der jeweiligen vollständigen Verbände kann die $(\sigma;\tau)$-Glättung von $f\colon L \to M$ auch geschrieben werden als

$$f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}(x) = \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, f(u^{\sigma}) : u \in \textstyle\prod \mathcal{S}^{n}L \;\&\; u^{\sigma} \leq^{\sigma}_{L} x \,\}.$$

Das nächste Theorem fasst die grundlegenden Eigenschaften der $(\sigma;\tau)$-Glättung zusammen. Man beachte dabei, dass erst für die Eindeutigkeitsaussage benötigt wird, dass die vollständigen Verbände $L_1, \dots, L_n$ superalgebraisch sind.

Theorem 3.1.19. *Es sei $(L;M) = (L_1,\dots,L_n;M)$ eine Familie vollständiger Verbände, $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ und $f\colon L \to M$ eine beliebige n-stellige Abbildung.*

(a) $f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$ ist $(\sigma;\tau)$-residuiert.

(b) Ist $f \restriction \mathfrak{S}_{\sigma}L$ $(\sigma;\tau)$-monoton, so sind f und $f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$ auf $\mathfrak{S}_{\sigma}L$ identisch.

(c) Für alle $g,h\colon L \to M$ folgt aus $g \restriction \mathfrak{S}_{\sigma}L \leq h \restriction \mathfrak{S}_{\sigma}L$ bereits $g^{\sim}_{(\sigma;\tau)} \leq h^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$.
Dies liefert insbesondere: $g \leq h \Rightarrow g^{\sim}_{(\sigma;\tau)} \leq h^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$.

(d) Sind die vollständigen Verbände $L_1, \dots, L_n$ superalgebraisch, so gilt: Für jede $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung $g\colon L \to M$, die auf $\mathfrak{S}_{\sigma}L$ mit f übereinstimmt, ist $g = f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$.

Insbesondere ist also $f = f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$, falls f schon $(\sigma;\tau)$-residuiert ist, und für alle $h\colon L \to M$ ergibt sich $(h^{\sim}_{(\sigma;\tau)})^{\sim}_{(\sigma;\tau)} = h^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$.

Beweis. Wir zeigen für (a), (b) und (d) den Fall $(\sigma;\tau) = ([+];+)$, die übrigen Behauptungen ergeben sich dann durch geeignete Dualisierung.

Zu (a). Sei $i \in \underline{n}$, $a \in \prod L$ und $A_i \subseteq L_i$. Mit der definierenden Eigenschaft $\bigvee$-primer Elemente erhält man

$$\begin{aligned}
&(f^{\sim})_i^a(\textstyle\bigvee_{L_i} A_i) = f^{\sim}(a[i \mapsto \textstyle\bigvee_{L_i} A_i]) \\
&= \textstyle\bigvee_M \{\, f(u) : u \in \prod \mathcal{S}^n L \;\&\; (\forall k \in \underline{n} \setminus \{i\})(u_k \leq_{L_k} a_k) \;\&\; u_i \leq_{L_i} \bigvee_{L_i} A_i \,\} \\
&= \textstyle\bigvee_M \{\, f(u) : u \in \prod \mathcal{S}^n L \;\&\; (\forall k \in \underline{n} \setminus \{i\})(u_k \leq_{L_k} a_k) \;\&\; u_i \in {\downarrow_{L_i}} A_i \,\} \\
&= \textstyle\bigvee_M \{\, f(u) : u \in \prod \mathcal{S}^n L \;\&\; (\exists x_i \in A_i)(u \leq_L a[i \mapsto x_i]) \,\} \\
&= \textstyle\bigvee_M \{\, \bigvee_M \{\, f(u) : u \in \prod \mathcal{S}^n L \;\&\; u \leq_L a[i \mapsto x_i] \,\} : x_i \in A_i \,\} \\
&= \textstyle\bigvee_M \{\, f^{\sim}(a[i \mapsto x_i]) : x_i \in A_i \,\} \\
&= \textstyle\bigvee_M \{\, (f^{\sim})_i^a(x_i) : x_i \in A_i \,\} = \bigvee_M (f^{\sim})_i^a[A_i],
\end{aligned}$$

also ist $f^{\sim}$ in der i-ten Variablen residuiert.

Zu (b). Ist $f \restriction \mathfrak{S}^n L$ in jeder Variablen isoton, so ist für alle $u \in \prod \mathfrak{S}^n L$

$$f^{\sim}(u) = \textstyle\bigvee_M \{\, f(v) : v \in \prod \mathcal{S}^n L \;\&\; v \leq_L u \,\} = f(u).$$

Zu (c). Aus $g \restriction \mathfrak{S}_\sigma L \leq h \restriction \mathfrak{S}_\sigma L$ folgt für alle $x \in L$

$$\begin{aligned}
g^{\sim}_{(\sigma;\tau)}(x) &= \textstyle\bigvee_M^\tau \{\, g(b) : b \in \prod \mathcal{S}_\sigma L \;\&\; b \leq_L^\sigma x \,\} \\
&\leq_M \textstyle\bigvee_M^\tau \{\, h(b) : b \in \prod \mathcal{S}_\sigma L \;\&\; b \leq_L^\sigma x \,\} = h^{\sim}_{(\sigma;\tau)}(x).
\end{aligned}$$

Zu (d). Sei $g\colon L \to M$ residuiert und $f \restriction \mathfrak{S}^n L = g \restriction \mathfrak{S}^n L$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{S}^n L$ ein $[+]$-Erzeuger von L ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
g(x) &= \textstyle\bigvee_M \{\, g(u) : u \in \prod \mathcal{S}^n L \;\&\; u \leq_L x \,\} \\
&= \textstyle\bigvee_M \{\, f(u) : u \in \prod \mathcal{S}^n L \;\&\; u \leq_L x \,\} = f^{\sim}(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir notieren die Aussagen des vorigen Theorems noch speziell für den am häufigsten benötigten Fall $(\sigma;\tau) = (+;+)$.

Korollar 3.1.20. *Es seien L, M vollständige Verbände und $f\colon L \to M$ eine Abbildung.*

(a) $\tilde{f}$ ist residuiert.

(b) Ist $f \restriction \mathfrak{S}L$ isoton, so sind f und $\tilde{f}$ auf $\mathfrak{S}L$ identisch.

(c) Für alle $g, h\colon L \to M$ folgt aus $g \restriction \mathfrak{S}L \leq h \restriction \mathfrak{S}L$ bereits $\tilde{g} \leq \tilde{h}$.

Insbesondere gilt: $g \leq h \Rightarrow \tilde{g} \leq \tilde{h}$.

(d) Sei L superalgebraisch. Stimmt eine residuierte Abbildung $g\colon L \to M$ auf $\mathfrak{S}L$ mit f überein, so ist $g = \tilde{f}$.

Somit gilt $f = \tilde{f}$, falls f schon residuiert ist, und für alle $g\colon L \to M$ ist $\tilde{\tilde{g}} = \tilde{g}$. $\square$

Aus Theorem 3.1.19 erhält man unmittelbar eine Charakterisierung $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden (vergleiche auch Proposition 2.2.27):

Korollar 3.1.21. *Sei* $(L; M)$ *eine Familie superalgebraischer Verbände und* $(\sigma;\tau)$ *eine Signatur. Eine Abbildung* $f\colon L \to M$ *ist genau dann* $(\sigma;\tau)$*-residuiert, wenn für alle* $x \in \prod L$

$$f(x) = \bigvee\nolimits^{\tau}_{M}\{\, f(b) : b \in {\downarrow}^{\sigma}_{L} x \cap \prod \mathcal{S}_{\sigma} L \,\}$$

gilt, denn dies ist äquivalent zu $f = f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$. □

Die nächste Proposition stellt einen Zusammenhang zwischen der Glättung mehrstelliger Funktionen und der Glättung einstelliger her.

Proposition 3.1.22. *Es sei* $L = (L_1, \ldots, L_n)$ *eine Familie superalgebraischer Verbände,* M *ein vollständiger Verband,* $(\sigma;\tau)$ *eine Signatur und* $f\colon L \to M$ *eine Abbildung, so dass* $f \restriction \mathfrak{S}_{\sigma} L$ $(\sigma;\tau)$*-monoton ist. Dann gilt für alle* $i \in \underline{n}$ *und alle* $u \in \prod \mathcal{S}_{\sigma} L$

$$\big(f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}\big)^{u}_{i} = (f^{u}_{i})^{\sim}_{(\sigma_i;\tau)}.$$

Beweis. Da f $(\sigma;\tau)$-monoton ist, folgt für jedes $x_i \in L_i$

$$\begin{aligned}\big(f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}\big)^{u}_{i}(x_i) &= f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}(u[i \mapsto x_i]) = \bigvee\nolimits^{\tau}_{M}\{\, f(v) : v \in \prod \mathcal{S}_{\sigma} L \;\&\; v \leq^{\sigma}_{L} u[i \mapsto x_i] \,\} \\ &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M}\{\, f(u[i \mapsto v_i]) : v_i \in \mathcal{S}_{\sigma_i} L_i \;\&\; v_i \leq^{\sigma_i}_{L_i} x_i \,\} \\ &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M}\{\, f^{u}_{i}(v_i) : v_i \in \mathcal{S}_{\sigma_i} L_i \;\&\; v_i \leq^{\sigma_i}_{L_i} x_i \,\} = (f^{u}_{i})^{\sim}_{(\sigma_i;\tau)}(x_i).\end{aligned}$$ □

Wir kommen nun auf die oben angeführte Fortsetzungseigenschaft zurück und werden sehen, dass sie – und damit ebenso die beschriebene eindeutige Glättung von Abbildungen – superalgebraische Verbände als Grundlage zwingend erfordert.

Definition 3.1.23 (Fortsetzungsbasen)**.** Sei L ein vollständiger Verband. Eine geordnete Menge $(B, \leq)$ mit $B \subseteq L$ und der durch L induzierten Ordnung heißt *Fortsetzungsbasis* von L, wenn es zu jedem vollständigen Verband M und jeder isotonen Abbildung $g\colon (B, \leq) \to M$ genau eine residuierte Abbildung $f\colon L \to M$ gibt, welche g fortsetzt (d. h. $f \restriction B = g$).

Der Begriff der Fortsetzungsbasis geht auf Markowsky und Rosen [67] zurück. Eine zur Fortsetzung isotoner Abbildungen ähnliche Fragestellung untersucht Venugopalan [86]; die dort betrachtete Fortsetzung von bereits residuierten Abbildungen spielt im folgenden jedoch keine Rolle.

Aus Korollar 3.1.20 ergibt sich sofort:

Korollar 3.1.24. *Für jeden superalgebraischen Verband* L *ist das Spektrum* $\mathfrak{S}L$ *eine Fortsetzungsbasis von* L. □

Dies folgt auch aus [89, Theorem 2.10] in einem allgemeineren Zusammenhang. Außerdem wird in [89] die folgende Umkehrung bewiesen, die zeigt, dass superalgebraische Verbände für unsere Zwecke genau die richtige Voraussetzung darstellen:

Proposition 3.1.25. *Sei* L *ein vollständiger Verband. Ist* $(B, \leq)$ *eine Fortsetzungsbasis von* L*, so ist* L *superalgebraisch und* $(B, \leq) = \mathfrak{S}L$.

Beweis. Siehe [89, Proposition 3.12]. □

3.2 Relationen zwischen Spektren

Das relationale Gegenstück zu $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden bilden die sogenannten $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen zwischen den zugrundeliegenden Spektren. Wir beginnen mit einer Beschreibung solcher Abschnittsrelationen zwischen beliebigen quasigeordneten Mengen. Im Anschluss untersuchen wir dann für superalgebraische Verbände das allgemeine Verhältnis von residuierten Abbildungen und Relationen zwischen Spektren.

3.2.1 Abschnittsrelationen

Abschnittsrelationen sind einfach untere Abschnitte eines nichtleeren, endlichen Produkts quasigeordneter Mengen.

Definition 3.2.1 (($(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen zwischen quasigeordneten Mengen)**.** Es sei $(P;Q) = (P_1,\ldots,P_n;Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ eine Signatur. Eine Relation R zwischen $P_1, \ldots, P_n$ und Q heißt $(\sigma;\tau)$-*Abschnittsrelation zwischen* $P_1, \ldots, P_n$ *und* Q (oder *über* $(P;Q)$), falls R ein unterer Abschnitt von $\prod P^{-\sigma} \times Q^{\tau}$ ist. Es sei

$$\mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)}(P_1,\ldots,P_n;Q) := \mathfrak{A}(P_1^{-\sigma_1} \times \ldots \times P_n^{-\sigma_n} \times Q^{\tau})$$

der vollständige Mengenverband der $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen zwischen $P_1, \ldots, P_n$ und Q.

Für $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ werden $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen einfach *Abschnittsrelationen* genannt. Wir schreiben $\mathsf{ARel}(P;Q)$ für $\mathsf{ARel}_{([+];+)}(P;Q)$.

Im extremen Fall $n = 0$ ist eine $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelation über $(P;Q)$ nach Definition dasselbe wie ein unterer Abschnitt von Q^{τ}.

Es sei daran erinnert, dass $\mathsf{Rel}(P_1,\ldots,P_n;Q)$ den vollständigen Mengenverband *aller* Relationen zwischen den quasigeordneten Mengen $P_1, \ldots, P_n$ und Q bezeichnet (siehe Definition 1.2.10).

Wir notieren als nächstes einige Varianten der Beschreibung von Abschnittsrelationen, die sich leicht aus der Definition ergeben. Weitere interessante Charakterisierungen werden mit Hilfe der später entwickelten Methoden in Theorem 6.2.45 angegeben.

Lemma 3.2.2. *Es sei* $(P;Q)$ *eine Familie quasigeordneter Mengen, und* $(\sigma;\tau),(\alpha;\beta) \in \{+,-\}^{n+1}$ *seien Signaturen. Für jede Relation* $R \in \mathsf{Rel}(P;Q)$ *sind äquivalent:*

(1) $R \in \mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)}(P;Q)$

(2) $R \in \mathsf{ARel}_{(\alpha\sigma;\beta\tau)}(P^{\alpha};Q^{\beta})$

(3) $R^{-i} \in \mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)^{-i}}(P[i \mapsto Q];P_i)$

(4) $R^{\mathrm{c}} \in \mathsf{ARel}_{-(\sigma;\tau)}(P;Q)$

(5) $\downarrow^{(-\sigma;\tau)}_{(P;Q)} R = R$

(6) Für alle $x,x' \in \prod P$, $y,y' \in Q$ *mit* $R(x;y)$, $x' \geq^{\sigma}_{P} x$ *und* $y' \leq^{\tau}_{Q} y$ *gilt* $R(x';y')$.

Beweis. Mit Lemma 1.2.9 ergibt sich (1) $\Leftrightarrow$ (4), und die übrigen Äquivalenzen sind offensichtlich. $\square$

Für $n = 1$ und $(\sigma;\tau) = (+;+)$ ist

$$\downarrow^{(-;+)}_{(P;Q)} R = \geq_Q \circ R \circ \geq_P,$$

und in diesem Fall ergeben sich speziell die folgenden Charakterisierungen von Abschnittsrelationen:

Proposition 3.2.3. *Seien P und Q quasigeordnete Mengen. Für jede Relation R zwischen P und Q sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) R ist eine Abschnittsrelation zwischen P und Q.

(2) Für alle $x, x' \in P$, $y, y' \in Q$ gilt: $x' \geq_P x \; R \; y \geq_Q y' \Rightarrow x' \; R \; y'$.

(3) $\geq_Q \circ R \circ \geq_P \subseteq R$.

(4) $\geq_Q \circ R \circ \geq_P = R$.

(5) $\geq_Q \circ R = R = R \circ \geq_P$.

(6) $\geq_P \subseteq R \to R$ und $\geq_Q \subseteq R \leftarrow R$.

Beweis. Dies sieht man leicht mit Lemma 3.2.2 und der Reflexivität von Quasiordnungen. Aussage (5) ist dazu äquivalent, dass $\geq_Q \circ R \subseteq R$ und $R \circ \geq_P \subseteq R$ gilt, also auch zu (6). □

Man beachte, dass die Relationen $R \to R$ und $R \leftarrow R$ in der letzten Aussage der Proposition nach Lemma 2.3.31 Quasiordnungen auf $|P|$ bzw. $|Q|$ sind. Vergleiche hierzu auch das spätere Korollar 6.1.20.

Die übliche Komposition von Relationen macht aus Abschnittsrelationen wieder solche:

Proposition 3.2.4. *Seien P, Q, O quasigeordnete Mengen.*

(a) Sind $R : P \rightharpoondown Q$ und $S : Q \rightharpoondown O$ Abschnittsrelationen, so ist auch $S \circ R : P \rightharpoondown O$ eine Abschnittsrelation.

(b) $\geq_P$ ist eine Abschnittsrelation auf P mit $\geq_P = \downarrow^{(-;+)}_{(P;P)} \mathrm{id}_P$.

Beweis. Zu (a). Dies ergibt sich leicht mit Proposition 3.2.3. Zu (b). Es gilt

$$(x, y) \in \downarrow^{(-;+)}_{(P;P)} \mathrm{id}_P \Leftrightarrow (\exists x', y' \in P)(x' = y' \;\&\; x \geq_P x' \;\&\; y \leq_P y') \Leftrightarrow x \geq_P y. \qquad \square$$

Nach Proposition 3.2.3 gilt darüber hinaus $\geq_Q \circ R = R = R \circ \geq_P$ für jede Abschnittsrelation $R : P \rightharpoondown Q$. Also bilden die quasigeordneten Mengen mit den Abschnittsrelationen eine Kategorie, in der die Identität auf einer quasigeordneten Menge P durch die duale Ordnung $\geq_P$ gegeben ist. Bezüglich der Mengeninklusion ist diese Kategorie sogar ein Quantaloid.

Definition 3.2.5 (Quantaloid der quasigeordneten Mengen und Abschnittsrelationen)**.** Es bezeichne ARel die Kategorie der quasigeordneten Mengen und Abschnittsrelationen mit der gewöhnlichen Komposition von Relationen und den Identitäten $1_P = \geq_P = \downarrow^{(-;+)}_{(P;P)} \mathrm{id}_P$.

Ihre Morphismenmengen $\mathsf{ARel}(P, Q)$ sind bezüglich der Inklusionsordnung vollständige Mengenverbände. Somit überträgt sich die Quantaloid-Struktur von Rel auf ARel, und es ist $\mathsf{ARel}(P, Q) = \mathfrak{A}(P^{\mathrm{op}} \times Q) = \mathsf{ARel}(P; Q)$.

ARel_0 sei diejenige volle Unterkategorie von ARel, deren Objekte genau die geordneten Mengen sind. Auch ARel_0 ist demnach ein Quantaloid.

Da sich die Quantaloid-Struktur für beliebige Relationen auf Abschnittsrelationen überträgt, werden die beiden Residuale der Komposition von ARel genauso wie in Rel gebildet, siehe Beispiel 2.3.26. Aus Lemma 3.2.2 folgt, dass mit $R : P \rightharpoondown Q$ auch $R^{\mathrm{d}} : Q^{\mathrm{op}} \rightharpoondown P^{\mathrm{op}}$ und $R^{\mathrm{c}} : P^{\mathrm{op}} \rightharpoondown Q^{\mathrm{op}}$ Abschnittsrelationen sind.

Bemerkung 3.2.6. Binäre Abschnittsrelationen sind in der Literatur unter vielen verschiedenen Namen bekannt. In [15] und [83] heißen sie beispielsweise *Ordnungsideale*, siehe auch [81] für weitere Zusammenhänge mit (bi-)kategoriellen Konstruktionen.

Um noch eine Reihe anderer Bezeichnungen für Abschnittsrelationen zu erläutern, sei daran erinnert, dass für quasigeordnete Mengen P, Q nach Lemma 1.2.20 die folgenden vollständigen Verbände isomorph sind:

$$\mathsf{ARel}(P, Q) = \mathfrak{A}(P^{\mathrm{op}} \times Q) \cong (\mathbf{2}^{P^{\mathrm{op}} \times Q})^{\mathrm{op}}.$$

Abschnittsrelationen zwischen P und Q korrespondieren also bijektiv mit isotonen Abbildungen $P^{\mathrm{op}} \times Q \to \mathbf{2}$. Nun lässt sich jede quasigeordnete Menge als $\mathcal{V}$-Kategorie für $\mathcal{V} = \mathbf{2}$ auffassen (siehe Bemerkung 2.3.33), und die $\mathcal{V}$-Funktoren (also $\mathbf{2}$-Funktoren, nicht zu verwechseln mit 2-Funktoren) sind in diesem Fall gerade die isotonen Funktionen. In der Terminologie der angereicherten Kategorien sind isotone Abbildungen $P^{\mathrm{op}} \times Q \to \mathbf{2}$ daher sogenannte *P-Q-Bimoduln*. Weitere Bezeichnungen für solche Bimoduln sind *Moduln*, *Profunktoren* oder *Distributoren*, siehe etwa [58]. Entsprechend findet man alle diese Termini auch für Abschnittsrelationen.

Wir erwähnen abschließend zwei weitere Formen, in denen Abschnittsrelationen auftreten. Bekanntlich erhält man für Mengen X, Y eine bijektive Korrespondenz von Relationen $R : X \rightharpoondown Y$ mit Funktionen $F_R \colon X \to \mathcal{P}Y$ durch $F_R(x) = xR$. Genauso ergibt sich für quasigeordnete Mengen P, Q eine Bijektion zwischen Abschnittsrelationen $R : P \rightharpoondown Q$ und isotonen Abbildungen $F_R \colon P \to \mathfrak{A}Q$. Letztere lassen sich außerdem jeweils zu genau einer residuierten Abbildung $G_R \colon \mathfrak{A}P \to \mathfrak{A}Q$ mit $G_R({\downarrow_P} x) = F_R(x)$ liften, und somit korrespondieren Abschnittsrelationen zwischen P und Q auch bijektiv mit residuierten Abbildungen zwischen den Abschnittsverbänden $\mathfrak{A}P$ und $\mathfrak{A}Q$ (vergleiche Korollar 6.2.47 und Theorem 7.3.17).

3.2.2 Realisierung residuierter Abbildungen durch Relationen

Wir kommen nun zum wichtigen Zusammenhang von $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen und $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen. Im folgenden wird möglichst allgemein die Realisierung residuierter Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden durch Relationen zwischen den zugehörigen Spektren entwickelt. In vielen Anwendungen ist dies vor allem für Abschnittsverbände oder noch spezieller für Potenzmengenverbände interessant. Im nächsten Abschnitt behandeln wir daher auch die Darstellung von residuierten Abbildungen zwischen Potenzmengenverbänden durch Relationen zwischen den Grundmengen ausführlich.

Seien L und M superalgebraische Verbände. Da die Spektren von L und M $\bigvee$-Erzeuger sind, ist eine residuierte Abbildung $f \colon L \to M$ durch ihre Werte auf $\mathcal{S}L$ bereits eindeutig festgelegt, und jedes ihrer Bilder kann als Supremum von Elementen aus $\mathcal{S}M$ dargestellt werden. Somit lässt sich die gesamte Funktion f in einer Relation zwischen $\mathcal{S}L$ und $\mathcal{S}M$ kodieren. Genauer ist für alle $x \in L$

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\bigvee_M \{\, f(u) : u \in \mathcal{S}L \;\&\; u \leq_L x \,\} \\ &= \textstyle\bigvee_M \{\, \bigvee_M \{\, v \in \mathcal{S}M : v \leq_M f(u) \,\} : u \in \mathcal{S}L \;\&\; u \leq_L x \,\} \\ &= \textstyle\bigvee_M \{\, v \in \mathcal{S}M : (\exists u \in \mathcal{S}L)(v \leq_M f(u) \;\&\; u \leq_L x) \,\}, \end{aligned}$$

die Abbildung f wird also aus der Relation $R \subseteq \mathcal{S}L \times \mathcal{S}M$ mit

$$R(u,v) \iff v \leq_M f(u)$$

durch $f(x) = \bigvee_M \{\, v : \exists u(R(u,v) \,\&\, u \leq_L x) \,\}$ wieder zurückgewonnen.

Diese Kodierung kann leicht auf beliebige $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen ausgedehnt werden. Bei bloßer Dualisierung würden dafür neben $\bigvee$-Spektren im allgemeinen jedoch auch $\bigwedge$-Spektren benötigt. Weil für superalgebraische Verbände das $\bigvee$-Spektrum jedoch isomorph zum $\bigwedge$-Spektrum ist (vermöge $u \mapsto u^-$), lassen sich $\bigwedge$-prime Elemente für die Kodierung komplett vermeiden. Dies führt auf die folgenden Definitionen.

Sofern nicht anders vermerkt, sei $(L;M) = (L_1,\dots,L_n;M)$ für den Rest dieses Abschnitts stets eine Familie superalgebraischer Verbände und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ eine Signatur.

Wir beginnen mit Relationen zwischen Spektren, aus denen Abbildungen zwischen den zugehörigen superalgebraischen Verbänden gewonnen werden.

Definition 3.2.7 (Durch Relationen induzierte Abbildungen)**.** Für eine beliebige $(n+1)$-stellige Relation $R \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}L_1,\dots,\mathfrak{S}L_n;\mathfrak{S}M)$ sei die n-stellige Abbildung

$$R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)} \colon (L_1,\dots,L_n) \to M$$

festgelegt durch

$$R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}(x) = \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, v^{\tau} : \exists u(R(u;v) \,\&\, u^{\sigma} \leq^{\sigma}_{L} x) \,\} \qquad (x \in \textstyle\prod L).$$

Im folgenden stehe $R^{\rhd}$ für $R^{\rhd}_{([+];+)}$.

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich:

Lemma 3.2.8. *Sei $R \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}^n L;\mathfrak{S}M)$. Für jedes $x \in \prod L$ ist*

$$\begin{aligned} R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}(x) &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \bigcup \{\, \{\, v^{\tau} : R(u;v) \,\} : u^{\sigma} \in {\downarrow}^{\sigma}_{L} x \cap \textstyle\prod \mathcal{S}_{\sigma} L \,\} \\ &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, v^{\tau} : R(u;v) \,\} : u^{\sigma} \in {\downarrow}^{\sigma}_{L} x \cap \textstyle\prod \mathcal{S}_{\sigma} L \,\}. \end{aligned}$$

Ist R eine $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelation, d. h. $R \in \mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)}(\mathfrak{S}^n L;\mathfrak{S}M)$, so gilt für alle $u \in \prod \mathcal{S}^n L$

$$\begin{aligned} R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}(u^{\sigma}) &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, v^{\tau} : \exists w(R(w;v) \,\&\, w^{\sigma} \leq^{\sigma} u^{\sigma}) \,\} \\ &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, v^{\tau} : \exists w(R(w;v) \,\&\, w \leq^{\sigma} u) \,\} \\ &= \bigvee\nolimits^{\tau}_{M} \{\, v^{\tau} : R(u;v) \,\}, \end{aligned}$$

im Fall $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ also insbesondere $R^{\rhd}(u_1,\dots,u_n) = \bigvee_M R(u_1,\dots,u_n;\_)$. □

In Vorbereitung auf das nächste Theorem notieren wir ein auch später hilfreiches Lemma.

Lemma 3.2.9. *Für alle $R \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}^n L;\mathfrak{S}M)$ und alle $(x;y) \in \prod L \times M$ gilt*

$$R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}(x) \leq^{\tau}_{M} y \iff \forall u \forall v\big(R(u;v) \Rightarrow (u^{\sigma} \leq^{\sigma}_{L} x \Rightarrow v^{\tau} \leq^{\tau}_{M} y)\big).$$

Beweis. Man berechnet

$$\begin{aligned} R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}(x) \leq^\tau y &\iff \bigvee^\tau \{\, v^\tau : \exists u(R(u;v) \ \&\ u^\sigma \leq^\sigma x) \,\} \leq^\tau y \\ &\iff \forall v(\exists u(R(u;v) \ \&\ u^\sigma \leq^\sigma x) \Rightarrow v^\tau \leq^\tau y) \\ &\iff \forall v \forall u((R(u;v) \ \&\ u^\sigma \leq^\sigma x) \Rightarrow v^\tau \leq^\tau y) \\ &\iff \forall u \forall v(R(u;v) \Rightarrow (u^\sigma \leq^\sigma x \Rightarrow v^\tau \leq^\tau y)). \end{aligned}$$ □

Das folgende zentrale Theorem zeigt nun zum einen, dass die Abbildungen

$$R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)} \colon L \to M$$

in jedem Fall $(\sigma;\tau)$-residuiert sind. Zum anderen beinhaltet es eine nützliche Identität für die Berechnung der i-ten Residuale von $R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}$. Die Notation R^{-i} für die i-te konverse Relation erlaubt dabei eine kompakte Schreibweise.

Theorem 3.2.10. *Für jede Relation $R \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}^n L; \mathfrak{S} M)$ ist $R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)} \colon L \to M$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung, und für alle $i \in \underline{n}$ gilt:*

$$(R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = (R^{-i})^{\rhd}_{(\sigma;\tau)^{-i}}.$$

Beweis. Für alle $x \in \prod L$, $y \in M$ ergibt sich mit Lemma 3.2.9, einer Kontraposition und Lemma 3.1.7

$$\begin{aligned} R^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}(x) \leq^\tau_M y &\iff \forall u \forall v\big(R(u;v) \Rightarrow (u^\sigma \leq^\sigma_L x \Rightarrow v^\tau \leq^\tau_M y)\big) \\ &\iff \forall u[i \mapsto v] \forall u_i \Big(R^{-i}(u[i \mapsto v]; u_i) \Rightarrow \\ &\qquad\qquad (u[i \mapsto v]^{\sigma[i \mapsto -\tau]} \leq^{\sigma[i \mapsto -\tau]}_{L[i \mapsto M]} x[i \mapsto y] \Rightarrow u_i^{-\sigma_i} \leq^{-\sigma_i}_{L_i} x_i)\Big) \\ &\iff (R^{-i})^{\rhd}_{(\sigma;\tau)^{-i}}(x[i \mapsto y]) \leq^{-\sigma_i}_{L_i} x_i \\ &\iff x_i \leq^{\sigma_i}_{L_i} (R^{-i})^{\rhd}_{(\sigma;\tau)^{-i}}(x[i \mapsto y]), \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Nachdem wir aus gegebenen Relationen $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen gewonnen haben, kodieren wir jetzt umgekehrt gegebene $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen mit Hilfe von Relationen. Allgemeiner als zu Beginn angedeutet, ordnen wir zunächst sogar *jeder* Abbildung zwischen superalgebraischen Verbänden eine Relation zwischen den Spektren zu.

Definition 3.2.11 (Durch Abbildungen induzierte Relationen)**.** Für eine beliebige n-stellige Abbildung $f \colon (L_1, \dots, L_n) \to M$ sei die $(n+1)$-stellige Relation

$$f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd} \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S} L_1, \dots, \mathfrak{S} L_n; \mathfrak{S} M)$$

definiert durch

$$(u;v) \in f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd} \quad :\iff \quad f[\uparrow^{\sigma_1}_{L_1} u_1^{\sigma_1}, \dots, \uparrow^{\sigma_n}_{L_n} u_n^{\sigma_n}] \subseteq \uparrow^\tau_M v^\tau.$$

Anstelle von $f^{([+];+)}_{\rhd}$ schreiben wir auch $f_{\rhd}$.

Lemma 3.2.12. *Für jede Abbildung $f\colon L \to M$ gilt*

$$(u;v) \in f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)} \quad\Longleftrightarrow\quad (\forall x \in \textstyle\prod L)(u^\sigma \leq_L^\sigma x \Rightarrow v^\tau \leq_M^\tau f(x)).$$

Ist $f\colon L \to M$ eine $(\sigma;\tau)$-monotone Abbildung, so folgt

$$(u;v) \in f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)} \quad\Longleftrightarrow\quad v^\tau \leq_M^\tau f(u^\sigma),$$

also $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}(u;\_) = {\downarrow}_M^\tau (f(u^\sigma))^\tau \cap \mathcal{S}M$, und im Fall $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ ist speziell $f_{\rhd}(u;\_) = {\downarrow}_M f(u) \cap \mathcal{S}M$.

Beweis. Die erste Äquivalenz erhält man sofort aus der Definition von $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$.

Zur zweiten Äquivalenz: „$\Rightarrow$“ gilt nach Definition von $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$ bereits für beliebiges f, und mit der $(\sigma;\tau)$-Monotonie ergibt sich offensichtlich auch die Umkehrung „$\Leftarrow$“. $\square$

Die induzierten Relationen $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$ sind immer Abschnittsrelationen:

Proposition 3.2.13. *Für jede Abbildung $f\colon L \to M$ ist $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$ eine $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelation zwischen $\mathfrak{S}L_1, \ldots, \mathfrak{S}L_n$ und $\mathfrak{S}M$.*

Beweis. Seien $(x;y), (u;v) \in \prod \mathcal{S}^n L \times \mathcal{S}M$, und es gelte $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}(x;y)$ und $(u;v) \leq^{(-\sigma;\tau)} (x;y)$. Dann ist $f[{\uparrow}_{L_1}^{\sigma_1} x_1^{\sigma_1}, \ldots, {\uparrow}_{L_n}^{\sigma_n} x_n^{\sigma_n}] \subseteq {\uparrow}_M^\tau y^\tau$, außerdem gilt $x^\sigma \leq^\sigma u^\sigma$ und $v^\tau \leq^\tau y^\tau$, d. h. ${\uparrow}_L^\sigma u^\sigma \subseteq {\uparrow}_L^\sigma x^\sigma$ und ${\uparrow}_M^\tau y^\tau \subseteq {\uparrow}_M^\tau v^\tau$. Insgesamt folgt also

$$f[{\uparrow}_{L_1}^{\sigma_1} u_1^{\sigma_1}, \ldots, {\uparrow}_{L_n}^{\sigma_n} u_n^{\sigma_n}] \subseteq f[{\uparrow}_{L_1}^{\sigma_1} x_1^{\sigma_1}, \ldots, {\uparrow}_{L_n}^{\sigma_n} x_n^{\sigma_n}] \subseteq {\uparrow}_M^\tau y^\tau \subseteq {\uparrow}_M^\tau v^\tau$$

und somit $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}(u;v)$. $\square$

In einem etwas anderen Kontext und mit anderen Bezeichnungen wird für einstellige $(\sigma;\tau)$-residuierte Operationen f bereits in [46] gezeigt, dass die Relationen $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$ binäre $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen sind.

Der Zusammenhang von induzierten Abbildungen und induzierten Relationen lässt sich präzise durch die folgende Adjunktion beschreiben.

Theorem 3.2.14. *Die Abbildungen*

$$R \mapsto R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd} \quad \text{und} \quad f \mapsto f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$$

bilden eine $(+;\tau)$-Adjunktion zwischen den vollständigen Verbänden

- $\mathsf{Rel}(\mathfrak{S}^n L; \mathfrak{S}M)$ *aller Relationen zwischen $\mathfrak{S}L_1, \ldots, \mathfrak{S}L_n$ und $\mathfrak{S}M$ und*
- $M^{|\prod L|}$ *aller Abbildungen von $L_1, \ldots, L_n$ in M.*

Beweis. Sei $R \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}^n L; \mathfrak{S}M)$ und $f\colon L \to M$. Nach Lemma 3.2.9 und der Definition von $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$ gilt

$$\begin{aligned}
R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd} \leq^\tau f \quad&\Longleftrightarrow\quad (\forall x \in \textstyle\prod L)(R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}(x) \leq_M^\tau f(x)) \\
&\Longleftrightarrow\quad (\forall x \in \textstyle\prod L)\big(\forall u \forall v\big((u;v) \in R \Rightarrow (u^\sigma \leq_L^\sigma x \Rightarrow v^\tau \leq_M^\tau f(x))\big)\big) \\
&\Longleftrightarrow\quad \forall u \forall v\big((u;v) \in R \Rightarrow (\forall x \in \textstyle\prod L)(u^\sigma \leq_L^\sigma x \Rightarrow v^\tau \leq_M^\tau f(x))\big) \\
&\Longleftrightarrow\quad R \subseteq f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Als nächstes stellen wir eine Verbindung von induzierten Abbildungen und Relationen sowohl mit der Glättung von Funktionen als auch mit dem Abschnittsoperator her. Außerdem wird gezeigt, unter welchen Umständen sich die Adjunktion aus dem vorigen Theorem zu einem Paar von zueinander inversen Isomorphismen einschränken lässt.

Theorem 3.2.15. *(a) Für alle $(\sigma;\tau)$-monotonen Abbildungen $f\colon L \to M$ ist*

$$\big(f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}\big)_{(\sigma;\tau)}^{\rhd} = f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}.$$

Falls f eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung ist, gilt also $\big(f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}\big)_{(\sigma;\tau)}^{\rhd} = f$.

(b) Für alle Relationen $R \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}^n L; \mathfrak{S}M)$ ist

$$\big(R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}\big)_{\rhd}^{(\sigma;\tau)} = \downarrow^{(-\sigma;\tau)}_{(\mathfrak{S}^n L;\mathfrak{S}M)} R.$$

Falls R eine $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelation ist, gilt also $\big(R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}\big)_{\rhd}^{(\sigma;\tau)} = R$.

Beweis. Zu (a). Sei $f\colon L \to M$ $(\sigma;\tau)$-monoton und $u \in \prod \mathcal{S}^n L$. Nach Proposition 3.2.13 ist $f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}$ eine $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelation, also nach Lemma 3.2.8 und Lemma 3.2.12

$$\big(f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}\big)_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}(u^\sigma) = \bigvee\nolimits^\tau \{\, v^\tau : f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}(u;v) \,\} = \bigvee\nolimits^\tau \{\, v^\tau : v^\tau \leq^\tau f(u^\sigma) \,\} = f(u^\sigma).$$

Da $\big(f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}\big)_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung ist, folgt $\big(f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}\big)_{(\sigma;\tau)}^{\rhd} = f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$ aus Theorem 3.1.19.

Zu (b). Sei $u \in \prod \mathcal{S}^n L$ und $v \in \mathcal{S}M$. Nach Theorem 3.2.10 ist $R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}$ insbesondere $(\sigma;\tau)$-monoton. Mit Lemma 3.2.12 erhält man

$$\begin{aligned}
(u;v) \in \big(R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}\big)_{\rhd}^{(\sigma;\tau)} \quad &\iff \quad v^\tau \leq^\tau R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd}(u^\sigma) = \bigvee\nolimits^\tau \{\, z^\tau : \exists w (R(w;z) \;\&\; w \leq^\sigma u) \,\} \\
&\iff \quad \exists z \big(\exists w (R(w;z) \;\&\; w \leq^\sigma u) \;\&\; v \leq^\tau z\big) \\
&\iff \quad \exists w \exists z \big(R(w;z) \;\&\; (u;v) \leq^{(-\sigma;\tau)} (w;z)\big) \\
&\iff \quad (u;v) \in \downarrow^{(-\sigma;\tau)}_{(\mathfrak{S}^n L;\mathfrak{S}M)} R,
\end{aligned}$$

da v^τ ein $\bigvee^\tau$-primes Element ist. □

Damit erhalten wir nun die bijektive Korrespondenz von $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen gegebenen superalgebraischen Verbänden mit $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen zwischen den zugehörigen Spektren.

Theorem 3.2.16. *Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)}(\mathfrak{S}^n L; \mathfrak{S}M)^\tau$ *aller $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen zwischen $\mathfrak{S}L_1, \ldots, \mathfrak{S}L_n$ und $\mathfrak{S}M$ und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(L;M)$ *aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen von $L_1, \ldots, L_n$ in M*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Ordnungsisomorphismen

$$R \mapsto R_{(\sigma;\tau)}^{\rhd} \quad \textit{und} \quad f \mapsto f_{\rhd}^{(\sigma;\tau)}.$$

Beweis. Nach Theorem 3.2.10 und Proposition 3.2.13 sowie Proposition 3.2.14 und Theorem 3.2.15. □

Als weitere Folgerung halten wir noch fest, dass die Glättung für monotone Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden nichts an der induzierten Relation ändert:

Korollar 3.2.17. *Für jede $(\sigma;\tau)$-monotone Abbildung $f\colon L \to M$ gilt*

$$\big(f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}\big)^{(\sigma;\tau)}_{\rhd} = f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd}.$$

Beweis. $f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd}$ ist eine $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelation über $(\mathfrak{S}^n L; \mathfrak{S} M)$, nach Theorem 3.2.15 also $\big((f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd})^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}\big)^{(\sigma;\tau)}_{\rhd} = f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd}$. Wegen der $(\sigma;\tau)$-Monotonie von f ist $\big(f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd}\big)^{\rhd}_{(\sigma;\tau)} = f^{\sim}_{(\sigma;\tau)}$, und insgesamt folgt die Behauptung. □

3.2.3 Das Quantaloid der Abschnittsrelationen

Mit den bisherigen Resultaten lässt sich nun leicht zeigen, dass das Quantaloid AL der superalgebraischen Verbände und residuierten Abbildungen äquivalent ist zum Quantaloid ARel der Abschnittsrelationen (zwischen quasigeordneten Mengen). Diese Äquivalenz wird im folgenden kurz dargestellt und in Kapitel 7 noch in einen allgemeineren Rahmen eingeordnet.

Zuerst formulieren wir die wohlbekannte Äquivalenz der Kategorien $\mathsf{AL}^{\vee}$ (superalgebraische Verbände und spektrumserhaltende, residuierte Abbildungen) und Pos (geordnete Mengen und isotone Abbildungen), deren Details beispielsweise in [30] ausgeführt sind.

Theorem 3.2.18. *Eine 2-Äquivalenz der lokal geordneten 2-Kategorien Pos und $\mathsf{AL}^{\vee}$ ergibt sich, indem jeder geordneten Menge P der superalgebraische Verband $\mathfrak{A}P$ und jeder isotonen Abbildung $f\colon P \to Q$ die Abbildung $D \mapsto {\downarrow_Q} f[D]$ von $\mathfrak{A}P$ nach $\mathfrak{A}Q$ zugeordnet wird.* □

Da $\mathsf{AL}^{\vee}$ und ACL dual isomorph sind, folgt daraus auch die bekannte Dualität der Kategorien ACL und Pos, und die Beschränkung auf endliche Objekte liefert den Darstellungssatz von Birkhoff für endliche distributive Verbände (siehe etwa [17]).

Neben dem in Theorem 3.2.18 beschriebenen Funktor von Pos in $\mathsf{AL}^{\vee}$ erhält man eine Äquivalenz in der umgekehrten Richtung durch einen speziellen Spektrumsfunktor, der jedem superalgebraischen Verband L sein Spektrum $\mathfrak{S}L$ und jeder spektrumserhaltenden, residuierten Abbildung die Restriktion $f \restriction \mathfrak{S}L\colon \mathfrak{S}L \to \mathfrak{S}M$ zuordnet.

Möchte man diese Äquivalenz nun auf die Kategorie AL, also *beliebige* residuierte Abbildungen verallgemeinern, so funktioniert die Restriktion auf das Spektrum im allgemeinen nicht mehr. Durch den Übergang zu anderen Morphismen zwischen geordneten Mengen lässt sich dieses Problem allerdings beheben, und als Objekte kommen dann sogar alle quasigeordneten Mengen in Frage.

Die Lösung liegt – mit den Ergebnissen aus Theorem 3.2.16 nicht mehr überraschend – im Übergang von Abbildungen zu Relationen, genauer von isotonen Abbildungen zu Abschnittsrelationen: Der entsprechend verallgemeinerte Spektrumsfunktor ordnet jeder residuierten Abbildung f die Abschnittsrelation $f_{\rhd}$ zu. Für ein ähnliches Vorgehen, das $\wedge$-Spektrum mit Hilfe von Multifunktionen oder mehrwertigen Funktionen (hier im Sinne linkstotaler Relationen) zu einem Funktor auszubauen, sei auf [52] oder auch [47] hingewiesen.

Die folgenden beiden Propositionen zeigen als erstes, dass im Fall $(\sigma;\tau) = (+;+)$ die Abbildungen $f \mapsto f_{\rhd}$ und $R \mapsto R^{\rhd}$ funktoriell sind.

Proposition 3.2.19. *Seien L, M, N superalgebraische Verbände, und seien $f\colon L \to M$, $g\colon M \to N$ residuierte Abbildungen.*

(a) $(g \circ f)_\rhd = g_\rhd \circ f_\rhd$.

(b) $(\mathrm{id}_L)_\rhd = \geq_{\mathfrak{S}L} = \downarrow^{(-;+)}_{(\mathfrak{S}L;\mathfrak{S}L)}\mathrm{id}_{\mathfrak{S}L}$.

Beweis. Zu (a). Für $u \in \mathcal{S}L$ und $w \in \mathcal{S}N$ ergibt sich, da w $\bigvee$-prim ist,

$$\begin{aligned}(u,w) \in (g \circ f)_\rhd \quad &\iff \quad w \leq g(f(u)) = g(\bigvee u f_\rhd) = \bigvee g[u f_\rhd] \\ &\iff \quad w \in \downarrow g[u f_\rhd] \\ &\iff \quad \exists v (v \in u f_\rhd \;\&\; w \leq g(v)) \\ &\iff \quad \exists v (u \; f_\rhd \; v \;\&\; v \; g_\rhd \; w) \\ &\iff \quad (u,w) \in g_\rhd \circ f_\rhd.\end{aligned}$$

Zu (b). Es gilt $(u,v) \in (\mathrm{id}_L)_\rhd \Leftrightarrow v \leq_L u$ für alle $u, v \in \mathcal{S}L$. □

Proposition 3.2.20. *Seien L, M, N superalgebraische Verbände, und seien $R : \mathfrak{S}L \rightharpoondown \mathfrak{S}M$, $S : \mathfrak{S}M \rightharpoondown \mathfrak{S}N$ Abschnittsrelationen.*

(a) $(S \circ R)^\rhd = S^\rhd \circ R^\rhd$.

(b) $(\geq_{\mathfrak{S}L})^\rhd = \left(\downarrow^{(-;+)}_{(\mathfrak{S}L;\mathfrak{S}L)}\mathrm{id}_{\mathfrak{S}L}\right)^\rhd = \mathrm{id}_L$.

Beweis. Zu (a). Da R eine Abschnittsrelation ist, gilt $R = (R^\rhd)_\rhd$, also $u \; R \; v \Leftrightarrow v \leq R^\rhd(u)$ für alle $u \in \mathcal{S}L$, $v \in \mathcal{S}M$. Nun ist für jedes $u \in \mathcal{S}L$ nach Lemma 3.2.8

$$\begin{aligned}(S^\rhd \circ R^\rhd)(u) = S^\rhd(R^\rhd(u)) &= \bigvee\{\, w : \exists v (v \; S \; w \;\&\; v \leq R^\rhd(u)) \,\} \\ &= \bigvee\{\, w : \exists v (v \; S \; w \;\&\; u \; R \; v) \,\} = \bigvee\{\, w : (u,w) \in S \circ R \,\} \\ &= (S \circ R)^\rhd(u),\end{aligned}$$

die residuierten Abbildungen $S^\rhd \circ R^\rhd$ und $(S \circ R)^\rhd$ sind also auf einer $\bigvee$-Basis identisch. Mit Proposition 1.2.36 folgt daraus die Behauptung.

Zu (b). Mit der Residuiertheit von id_L ergibt sich aus Proposition 3.2.19 $(\geq_{\mathfrak{S}L})^\rhd = \left((\mathrm{id}_L)_\rhd\right)^\rhd = \mathrm{id}_P$. □

Definition 3.2.21 (Spektrumsfunktor)**.** Der *Spektrumsfunktor* $\mathfrak{S}\colon \mathsf{AL} \to \mathsf{ARel}$ (siehe Proposition 3.2.19) sei festgelegt durch

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}L &= (\mathcal{S}L, \leq) &&\text{für alle } L \in |\mathsf{AL}|, \\ \mathfrak{S}f &= f_\rhd &&\text{für alle } f \in \mathsf{AL}(L,M).\end{aligned}$$

Theorem 3.2.22. *Die Quantaloide* AL *und* ARel *sind äquivalent vermöge der Quantaloid-Äquivalenz* $\mathfrak{S}\colon \mathsf{AL} \to \mathsf{ARel}$*. Da das Spektrum stets eine geordnete Menge ist, ergibt sich auf dieselbe Weise auch die Äquivalenz der Quantaloide* AL *und* ARel_0*.*

Beweis. Nach Theorem 3.2.16 sind die Abbildungen $\mathfrak{S}_{L,M}$ für alle $L, M \in |\mathsf{AL}|$ Ordnungsisomorphismen, insbesondere ist der Funktor $\mathfrak{S}$ also voll und treu. Wir zeigen noch, dass er außerdem wesentlich surjektiv ist, womit nach Korollar 2.3.24 (und Proposition 2.3.8) die Behauptung folgt.

Es sei $P \in |\mathsf{ARel}|$ eine quasigeordnete Menge. Dann ist $\mathfrak{A}P \in |\mathsf{AL}|$, und die geordnete Menge $\mathfrak{S}\mathfrak{A}P = (\{\downarrow_P x : x \in P\}, \subseteq) \in |\mathsf{ARel}|$ ist in ARel zu P isomorph: Für die Relationen $R : P \rightharpoondown \mathfrak{S}\mathfrak{A}P$ und $S : \mathfrak{S}\mathfrak{A}P \rightharpoondown P$ mit

$$(x, \downarrow_P y) \in R \quad :\Longleftrightarrow \quad (\downarrow_P x, y) \in S \quad :\Longleftrightarrow \quad \downarrow_P y \subseteq \downarrow_P x \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq_P x$$

prüft man leicht nach, dass sie beide Abschnittsrelationen sind (d. h. $\geq_{\mathfrak{S}\mathfrak{A}P} \circ R \circ \geq_P \subseteq R$ und $\geq_P \circ S \circ \geq_{\mathfrak{S}\mathfrak{A}P} \subseteq S$ gilt) und außerdem

$$S \circ R = \geq_P \quad \text{und} \quad R \circ S = \geq_{\mathfrak{S}\mathfrak{A}P} = \supseteq$$

erfüllen. Somit sind R und S zueinander inverse ARel-Isomorphismen. □

Man beachte zum Beweis des obigen Theorems, dass eine quasigeordnete Menge P genau dann *ordnungsisomorph* zu $\mathfrak{S}\mathfrak{A}P$ ist, wenn sie eine geordnete Menge ist. Die Isomorphie-Begriffe in Qos und ARel sind also voneinander verschieden! Vergleichbares wird später auch allgemeiner für residuierte Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden und gewissen Relationen zwischen Hüllenräumen eine wichtige Rolle spielen. Theorem 3.2.22 wurde bereits früher entdeckt von Rosebrugh und Wood [81, Theorem 21].

Für eine residuierte Abbildung $f : L \to M$ zwischen superalgebraischen Verbänden, die außerdem spektrumserhaltend ist, unterscheidet sich $\mathfrak{S}f = f_\rhd$ wie folgt von der bloßen Restriktion $f \restriction \mathfrak{S}L$: Für alle $u \in \mathcal{S}L$ ist

$$uf_\rhd = \downarrow_M f(u) \cap \mathcal{S}M = \downarrow_{\mathfrak{S}M} f(u),$$

und da $f \restriction \mathfrak{S}L : \mathfrak{S}L \to \mathfrak{S}M$ isoton ist, erhält man

$$f_\rhd = \downarrow^{(-;+)}_{(\mathfrak{S}L;\mathfrak{S}M)} (f \restriction \mathfrak{S}L),$$

d. h. $f_\rhd$ ist die von $f \restriction \mathfrak{S}L$ erzeugte Abschnittsrelation.

Wir nennen eine Abschnittsrelation $R : P \rightharpoondown Q$ zwischen quasigeordneten Mengen *funktional*, falls sie in diesem Sinne von einer isotonen Abbildung $r : P \to Q$ erzeugt wird:

$$R = \downarrow^{(-;+)}_{(P;Q)} r.$$

Wegen der Isotonie von r ist dies äquivalent zu $xR = \downarrow_Q r(x)$ für alle $x \in P$. Für eine *geordnete* Menge Q ist die erzeugende Funktion einer funktionalen Abschnittsrelation $R : P \rightharpoondown Q$ sogar eindeutig bestimmt ($\downarrow_Q r(x) = \downarrow_Q r'(x)$ impliziert dann $r(x) = r'(x)$).

Analog zu Funktionen im Quantaloid Rel (siehe Beispiel 2.3.16) lassen sich auch die funktionalen Abschnittsrelationen als co-adjungierte Morphismen charakterisieren:

Proposition 3.2.23. *Eine Abschnittsrelation $R : P \rightharpoondown Q$ zwischen quasigeordneten Mengen ist genau dann co-adjungiert in* ARel*, wenn sie funktional ist.*

Beweis. Sei zunächst R co-adjungiert, d. h. es gebe eine Abschnittsrelation $S : Q \rightharpoonup P$ mit $S \circ R \supseteq \geq_P$ und $R \circ S \subseteq \geq_Q$. Sei $x \in P$. Wegen $x \geq_P x$ folgt dann $x\ (S \circ R)\ x$, d. h. es gibt ein $y \in Q$ mit $x\ R\ y$ und $y\ S\ x$. Gilt auch $x\ R\ z$ für ein $z \in Q$, so folgt $y\ (R \circ S)\ z$ und somit $y \geq_Q z$, also ist $xR = {\downarrow_Q} y$. Das Auswahlaxiom liefert eine Funktion $r\colon P \to Q$ mit $xR = {\downarrow_Q} r(x)$. Da R eine Abschnittsrelation ist, ergibt sich außerdem, dass r isoton ist. R ist folglich funktional. Ist Q eine geordnete Menge, so wird das Auswahlaxiom für den Beweis natürlich nicht benötigt.

Sei umgekehrt R funktional, also $R = {\downarrow^{(-;+)}_{(P;Q)}} r$ für eine isotone Funktion $r\colon P \to Q$. Definiere eine Abschnittsrelation $S : Q \rightharpoonup P$ durch $S = {\downarrow^{(-;+)}_{(Q;P)}}(r^{\mathrm{d}})$. Dann gilt $xR = {\downarrow_Q} r(x)$ und $Sx = {\uparrow_Q} r(x)$ für alle $x \in P$. Einerseits impliziert $x \geq_P y$ damit $x\ R\ r(x)\ S\ x$ und somit auch $x\ (S \circ R)\ y$, da S eine Abschnittsrelation ist. Andererseits folgt aus $y\ S\ x\ R\ z$, dass $y \geq_Q r(x)$ und $z \leq_Q r(x)$, also auch $y \geq_Q z$ gilt. Insgesamt ist R somit co-adjungiert. □

Notation 3.2.24 (Kategorie der funktionalen Abschnittsrelationen)**.** Es bezeichne $\mathsf{ARel}_0^\vee :=$ Co-Adj(ARel_0) die lokal geordnete 2-Kategorie der geordneten Mengen und funktionalen Abschnittsrelationen.

Durch $r \mapsto {\downarrow^{(-;+)}_{(P;Q)}} r$ erhält man einen Ordnungsisomorphismus zwischen $\mathsf{Pos}(P, Q)$ und der geordneten Menge $\mathsf{ARel}_0^\vee(P, Q)$ aller funktionalen Abschnittsrelationen zwischen P und Q, der sich zu einem Funktor ausbauen lässt. Als Verallgemeinerung von Co-Adj$(\mathsf{Rel}) = \mathsf{Set}$ folgt daraus mit der vorigen Proposition:

Theorem 3.2.25. *Die lokal geordneten* 2*-Kategorien* $\mathsf{ARel}_0^\vee =$ Co-Adj(ARel_0) *und* Pos *sind isomorph.* □

Hieraus ergibt sich zusammen mit der Äquivalenz von ARel_0 und AL (nach Theorem 3.2.22) und Co-Adj$(\mathsf{AL}) = \mathsf{AL}^\vee$ (nach Proposition 3.1.16) erneut die zu Beginn erwähnte klassische Äquivalenz von $\mathsf{AL}^\vee$ und Pos (siehe Theorem 3.2.18).

3.3 Potenzmengenverbände

In diesem Abschnitt untersuchen wir $(\sigma;\tau)$-residuierte Familien über Potenzmengenverbänden und ihre Realisierung durch Relationen. Für $(\sigma;\tau) = (+;-)$ erhält man dabei die wohlbekannten *Polaritäten*, d. h. Galois-Verbindungen zwischen Potenzmengenverbänden. Etwas weniger geläufig sind die sogenannten *Axialitäten*, die sich im Fall $(\sigma;\tau) = (+;+)$ als Adjunktionen zwischen Potenzmengenverbänden ergeben. Gewöhnlich werden Axialitäten und Polaritäten auf verschiedene Weise durch Relationen kodiert (wobei über geeignete Komplement-Bildung ein einfacher Zusammenhang besteht), siehe etwa [38] oder [34]. Da beide Möglichkeiten in diversen Anwendungen eine Rolle spielen, betrachten wir $(\sigma;\tau)$-residuierte Familien über Potenzmengenverbänden zunächst als verallgemeinerte Axialitäten und danach als verallgemeinerte Polaritäten. Neben einer systematischen Darstellung der gebräuchlichen Methoden, $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Potenzmengenverbänden durch Relationen zu induzieren, ergeben sich damit außerdem alle nötigen Werkzeuge, um in Kapitel 6 die vorher ausgearbeitete Theorie für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen auch auf Relationen zwischen Hüllenräumen zu übertragen.

Sämtliche Inhalte dieses Abschnitts lassen sich relativ leicht direkt beweisen. Da Potenzmengenverbände aber spezielle superalgebraische Verbände sind, nutzen wir stattdessen die Resultate des vorigen Abschnitts. Zu diesem Zweck beginnen wir mit zwei nützlichen

Operatoren, die unter Verwendung der Bijektion $x \mapsto \{x\}$ zwischen einer Grundmenge X und dem Spektrum $\mathcal{S}\mathfrak{P}X = \{\, \{x\} : x \in X \,\}$ gebildet werden. Diese Operatoren erlauben uns, die bisherigen Resultate nicht nur auf Relationen zwischen Spektren, sondern auch auf Relationen zwischen Grundmengen zu übertragen, was für Potenzmengenverbände natürlich nahe liegt. Als erstes stellen wir fest:

Lemma 3.3.1. *Vermöge der Abbildung $x \mapsto \{x\}$ ist für jede Menge X die Antikette $(X, =)$ isomorph zu $\mathfrak{S}\mathfrak{P}X = \mathfrak{S}\mathfrak{A}(X, =)$. Insbesondere ist $\geq_{\mathfrak{S}\mathfrak{P}X} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}\mathfrak{P}X}$.*

Beweis. Die Bijektion $x \mapsto \{x\}$ ist ein Isomorphismus wegen $\{x\} \subseteq \{y\} \Leftrightarrow x = y$. □

Nun zu den angekündigten Operatoren $(\,\cdot\,)^{\mathcal{P}}$ und $(\,\cdot\,)_{\mathcal{P}}$.

Definition 3.3.2 (Singleton-Operatoren)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n, Y$ Mengen. Für jede Relation $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ sei die Relation $R^{\mathcal{P}} \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{S}\mathfrak{P}X_n; \mathfrak{S}\mathfrak{P}Y)$ definiert durch

$$R^{\mathcal{P}} = \{\, (\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}; \{y\}) : (x_1, \ldots, x_n; y) \in R \,\}.$$

Für $S \in \mathsf{Rel}(\mathfrak{S}\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{S}\mathfrak{P}X_n; \mathfrak{S}\mathfrak{P}Y)$ sei umgekehrt $S_{\mathcal{P}} \in \mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ festgelegt durch

$$S_{\mathcal{P}} = \{\, (x_1, \ldots, x_n; y) \in \textstyle\prod_{i=1}^{n} X_i \times Y : (\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}; \{y\}) \in S \,\}.$$

Lemma 3.3.3. *Für jede Mengen-Familie $(X; Y)$ und jede Signatur $(\sigma; \tau) \in \{+, -\}^{n+1}$ sind die Abbildungen $R \mapsto R^{\mathcal{P}}$ und $S \mapsto S_{\mathcal{P}}$ zueinander inverse Ordnungsisomorphismen zwischen den vollständigen Verbänden*

$$\mathsf{Rel}(X; Y) \quad \textit{und} \quad \mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)}(\mathfrak{S}^n\mathfrak{P}^n X; \mathfrak{S}\mathfrak{P}Y).$$

Beweis. Da alle $\mathfrak{S}\mathfrak{P}X_i$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{P}Y$ Antiketten sind, ist jede Relation zwischen $\mathfrak{S}\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{S}\mathfrak{P}X_n$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{P}Y$ bereits eine $(\sigma; \tau)$-Abschnittsrelation. □

Im Fall $n = 1$ sind die Abbildungen $R \mapsto R^{\mathcal{P}}$ und $S \mapsto S_{\mathcal{P}}$ funktoriell:

Lemma 3.3.4. *Seien X, Y, Z Mengen.*

(a) Für Relationen $R : X \rightharpoondown Y$, $S : Y \rightharpoondown Z$ gilt

$$(S \circ R)^{\mathcal{P}} = S^{\mathcal{P}} \circ R^{\mathcal{P}} \quad \textit{und} \quad (\mathrm{id}_X)^{\mathcal{P}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}\mathfrak{P}X}.$$

(b) Für (Abschnitts-)Relationen $R : \mathfrak{S}\mathfrak{P}X \rightharpoondown \mathfrak{S}\mathfrak{P}Y$, $S : \mathfrak{S}\mathfrak{P}Y \rightharpoondown \mathfrak{S}\mathfrak{P}Z$ gilt

$$(S \circ R)_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}} \circ R_{\mathcal{P}} \quad \textit{und} \quad (\mathrm{id}_{\mathfrak{S}\mathfrak{P}X})_{\mathcal{P}} = \mathrm{id}_X.$$

Beweis. Trivial. □

Für den gesamten Rest des Abschnitts sei nun $(X; Y) = (X_1, \ldots, X_n; Y)$ eine Familie von Mengen und $(\sigma; \tau) \in \{+, -\}^{n+1}$ eine Signatur.

3.3.1 Verallgemeinerte Axialitäten

Unter einer durch eine Relation R induzierten $(\sigma;\tau)$-*Axialität* verstehen wir eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie zwischen Potenzmengenverbänden, deren Kopf auf die im folgenden beschriebene Weise aus R entsteht. Es wird sich herausstellen, dass dann $(+;+)$-Axialitäten gerade die im gewöhnlichen Sinne durch Relationen induzierten Axialitäten sind.

Definition 3.3.5 (Induzierte verallgemeinerte Axialitäten)**.** Für eine $(n+1)$-stellige Relation $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \dots, X_n; Y)$ sei die n-stellige Abbildung $R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \colon (\mathfrak{P}X_1, \dots, \mathfrak{P}X_n) \to \mathfrak{P}Y$ definiert durch

$$R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} = (R^{\mathcal{P}})^{\rhd}_{(\sigma;\tau)}.$$

Wir schreiben $R^{\exists}$ für $R^{\exists}_{([+];+)}$.

Für eine n-stellige Abbildung $f \colon (\mathfrak{P}X_1, \dots, \mathfrak{P}X_n) \to \mathfrak{P}Y$ sei umgekehrt durch

$$f^{(\sigma;\tau)}_{\exists} = (f^{(\sigma;\tau)}_{\rhd})_{\mathcal{P}}$$

eine $(n+1)$-stellige Relation $f^{(\sigma;\tau)}_{\exists} \in \mathsf{Rel}(X_1, \dots, X_n; Y)$ festgelegt. Auch hier stehe $f_\exists$ für $f^{([+];+)}_{\exists}$.

Aus dieser Definition ergeben sich zusammen mit früheren Resultaten für superalgebraische Verbände sofort die nächsten beiden Theoreme. $R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \colon (\mathfrak{P}X_1, \dots, \mathfrak{P}X_n) \to \mathfrak{P}Y$ ist insbesondere stets $(\sigma;\tau)$-residuiert.

Theorem 3.3.6. *Die Abbildungen*

$$R \mapsto R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \quad \textit{und} \quad f \mapsto f^{(\sigma;\tau)}_{\exists}$$

bilden eine Adjunktion zwischen den vollständigen Verbänden

- $\mathsf{Rel}(X;Y)^{\tau}$ *aller Relationen zwischen* X_1, ..., X_n *und* Y *und*
- $(\mathfrak{P}Y)^{\prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}X_i}$ *aller Abbildungen von* $\mathfrak{P}X_1$, ..., $\mathfrak{P}X_n$ *in* $\mathfrak{P}Y$.

Beweis. Nach Theorem 3.2.14. □

Aus dem nächsten Theorem folgt, dass der Operator

$$(\,\cdot\,)^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \colon \mathsf{Rel}(X;Y) \to \mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(\mathfrak{P}^n X; \mathfrak{P}Y)$$

für $\tau = +$ ein Isomorphismus und für $\tau = -$ ein dualer Isomorphismus ist.

Theorem 3.3.7. *Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{Rel}(X;Y)^{\tau}$ *aller Relationen zwischen* X_1, ..., X_n *und* Y *und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(\mathfrak{P}^n X; \mathfrak{P}Y)$ *aller* $(\sigma;\tau)$*-residuierten Abbildungen von* $\mathfrak{P}X_1$, ..., $\mathfrak{P}X_n$ *in* $\mathfrak{P}Y$

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen

$$R \mapsto R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \quad \textit{und} \quad f \mapsto f^{(\sigma;\tau)}_{\exists}.$$

Beweis. Laut Theorem 3.2.16 und Lemma 3.3.3. □

Wie man mit den im weiteren Verlauf gegebenen Beschreibungen von $R^\exists$ und $f_\exists$ sieht, beinhaltet das obige Theorem für $(\sigma;\tau) = (+;+)$ insbesondere die bekannte bijektive Korrespondenz von Axialitäten mit Relationen, wie sie beispielsweise in [38] oder [34] (mit von unseren abweichenden Bezeichnungen) dargestellt wird.

Wir betrachten nun als erstes, wie sich $R^\exists_{(\sigma;\tau)}$ über die Definition hinaus charakterisieren lässt und aus $R^\exists$ mit Hilfe des Komplement-Operators entsteht. Für Vorzeichen $\sigma_i \in \{+,-\}$ benutzen wir im folgenden häufiger die aus Beispiel 3.1.10 bekannte Beziehung (3.1):

$$\{x_i\}^{\sigma_i} \subseteq^{\sigma_i} A_i \quad\Longleftrightarrow\quad \sigma_i\{x_i\} \subseteq^{\sigma_i} A_i \quad\Longleftrightarrow\quad x_i \in \sigma_i A_i.$$

Proposition 3.3.8. *Sei R eine Relation zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und Y. Ist $A_i \subseteq X_i$ für alle $i \in \underline{n}$, so gilt*

$$\begin{aligned} R^\exists(A_1,\ldots,A_n) &= \{\, y : \exists x(R(x;y) \;\&\; x \in \textstyle\prod_{i=1}^n A_i) \,\} \\ &= \textstyle\bigcup\{\, R(x;\_) : x \in \prod_{i=1}^n A_i \,\} \end{aligned}$$

und außerdem $R^\exists_{(\sigma;\tau)}(A_1,\ldots,A_n) = \tau R^\exists(\sigma_1 A_1,\ldots,\sigma_n A_n)$, also

$$R^\exists_{(\sigma;\tau)} = \tau \circ R^\exists \circ \sigma.$$

Beweis. Nach Definition von $R^\exists_{(\sigma;\tau)}$ ist

$$\begin{aligned} &R^\exists_{(\sigma;\tau)}(A_1,\ldots,A_n) \\ &= \textstyle\bigcup^\tau \{\, \tau\{y\} : \exists x_1 \ldots \exists x_n (R(x_1,\ldots,x_n;y) \;\& \\ &\qquad\qquad \sigma_1\{x_1\} \subseteq^{\sigma_1} A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \sigma_n\{x_n\} \subseteq^{\sigma_n} A_n) \,\} \\ &= \tau\{\, y : \exists x_1 \ldots \exists x_n (R(x_1,\ldots,x_n;y) \;\&\; x_1 \in \sigma_1 A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_n \in \sigma_n A_n) \,\}. \end{aligned}$$

Daraus folgen bereits alle Behauptungen. □

Im Falle binärer Relationen $R : X \rightharpoondown Y$ ist somit

$$R^\exists(A) = AR = \{\, y : (\exists x \in A)(x\ R\ y) \,\} = \textstyle\bigcup\{\, xR : x \in A \,\}$$

für jedes $A \subseteq X$. Außerdem folgt aus Proposition 3.3.8 unmittelbar:

Korollar 3.3.9. *Sei R eine Relation zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und Y. Es gilt*

$$R^\exists_{(\sigma;\tau)}(\sigma_1\{x_1\},\ldots,\sigma_n\{x_n\}) = \tau R(x_1,\ldots,x_n;\_)$$

für alle $(x_1,\ldots,x_n) \in \prod X$. □

Als nächstes wird gezeigt, wie die Relationen $f_\exists^{(\sigma;\tau)}$ gebildet werden.

Proposition 3.3.10. *Sei $f\colon (\mathfrak{P}X_1,\ldots,\mathfrak{P}X_n) \to \mathfrak{P}Y$ eine Abbildung, und seien $x_i \in X_i$ ($i \in \underline{n}$) sowie $y \in Y$.*

(a) Es gilt genau dann $f_\exists^{(\sigma;\tau)}(x_1,\ldots,x_n;y)$, wenn

$$(\forall A_1 \subseteq X_1)\ldots(\forall A_n \subseteq X_n)\big((x_1 \in A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_n \in A_n) \Rightarrow y \in \tau f(\sigma_1 A_1,\ldots,\sigma_n A_n)\big)$$

erfüllt ist. Somit ist

$$f_\exists^{(\sigma;\tau)} = (\tau \circ f \circ \sigma)_\exists.$$

(b) Ist f $(\sigma;\tau)$-monoton, so gilt

$$f_\exists^{(\sigma;\tau)}(x_1,\dots,x_n;\_) = \tau f(\sigma_1\{x_1\},\dots,\sigma_n\{x_n\}),$$

für $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ also insbesondere

$$(x_1,\dots,x_n;y) \in f_\exists \quad\Longleftrightarrow\quad y \in f(\{x_1\},\dots,\{x_n\}).$$

Beweis. Zu (a). Nach Definition von $f_\exists^{(\sigma;\tau)}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
(x_1,\dots,x_n;y) \in f_\exists^{(\sigma;\tau)} \quad&\Longleftrightarrow\quad (\{x_1\},\dots,\{x_n\};\{y\}) \in f_\rhd^{(\sigma;\tau)}\\
\Longleftrightarrow\quad& (\sigma_1\{x_1\} \subseteq^{\sigma_1} B_1 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \sigma_n\{x_n\} \subseteq^{\sigma_n} B_n) \Rightarrow \tau\{y\} \subseteq^\tau f(B_1,\dots,B_n)\\
&\quad \text{für alle } B_i \subseteq X_i \ (i \in \underline{n})\\
\Longleftrightarrow\quad& (x_1 \in \sigma_1 B_1 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} x_n \in \sigma_n B_n) \Rightarrow y \in \tau f(B_1,\dots,B_n)\\
&\quad \text{für alle } B_i \subseteq X_i \ (i \in \underline{n})\\
\Longleftrightarrow\quad& (x_1 \in A_1 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} x_n \in A_n) \Rightarrow y \in \tau f(\sigma_1 A_1,\dots,\sigma_n A_n)\\
&\quad \text{für alle } A_i \subseteq X_i \ (i \in \underline{n}).
\end{aligned}$$

Zu (b). Dies folgt aus Lemma 3.2.12 oder direkt aus Teil (a). □

Da für $(\sigma;\tau)$-monotone Abbildungen f zwischen Potenzmengenverbänden zur Bildung von $f_\exists^{(\sigma;\tau)}$ nur Singletons, d. h. Argumente der Form $(\{x_1\},\dots,\{x_n\})$, eine Rolle spielen, gilt offensichtlich:

Korollar 3.3.11. *Für jede $(\sigma;\tau)$-monotone Abbildung $f\colon \mathfrak{P}^n X \to \mathfrak{P} Y$ ist*

$$(f^\sim_{(\sigma;\tau)})_\exists^{(\sigma;\tau)} = f_\exists^{(\sigma;\tau)}.$$

Beweis. Nach Definition von $f_\exists^{(\sigma;\tau)}$ und Korollar 3.2.17. □

Im nächsten Theorem wird nun beschrieben, wie die Residuale einer $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildung $R^\exists_{(\sigma;\tau)}$ gebildet werden. Damit ergibt sich jeweils die konkrete Realisierung der gesamten $(\sigma;\tau)$-Axialität (und nicht nur ihres $(\sigma;\tau)$-residuierten Kopfes) durch die Relation R. Das Theorem stellt für alle Signaturen $(\sigma;\tau)$ systematisch dar, was in der Literatur häufig nur ad hoc konstruiert und für Einzelfälle nachgewiesen wird.

Theorem 3.3.12. *Sei $R \in \mathsf{Rel}(X_1,\dots,X_n;Y)$ und $i \in \underline{n}$. Es gilt*

$$(R^\exists_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = (R^{-i})^\exists_{(\sigma;\tau)^{-i}},$$

und für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$ und $B \subseteq Y$ ist

$$\begin{aligned}
(R^\exists_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(A_1,\dots,B,\dots,A_n) &= \sigma_i\{\, x_i \in X_i : R^\exists(\sigma_1 A_1,\dots,\{x_i\},\dots,\sigma_n A_n) \subseteq \tau B \,\}\\
&= \sigma_i\{\, x_i \in X_i : R^\exists_{(\sigma;\tau)}(A_1,\dots,\sigma_i\{x_i\},\dots,A_n) \subseteq^\tau B \,\}.
\end{aligned}$$

Speziell für $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ ist

$$\begin{aligned}
(R^\exists)^{(i)}(A_1,\dots,B,\dots,A_n) &= \{\, x_i : R^\exists(A_1,\dots,\{x_i\},\dots,A_n) \subseteq B \,\}\\
&= \{\, x_i : \forall x_1 \dots \forall x_{i-1} \forall x_{i+1} \dots \forall x_n \forall y\\
&\qquad (R(x;y) \Rightarrow ((\forall k \in \underline{n} \setminus \{i\})(x_k \in A_k) \Rightarrow y \in B)) \,\}.
\end{aligned}$$

Beweis. Mit Theorem 3.2.10 gilt zunächst

$$(R^{\exists}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = ((R^{\mathcal{P}})^{\rhd}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = ((R^{\mathcal{P}})^{-i})^{\rhd}_{(\sigma;\tau)^{-i}} = (R^{-i})^{\exists}_{(\sigma;\tau)^{-i}},$$

also die erste Gleichung. Damit ist nach Proposition 3.3.8

$$\begin{aligned}
&(R^{\exists}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n)\\
&= -\sigma_i(R^{-i})^{\exists}(\sigma_1 A_1, \ldots, -\tau B, \ldots, \sigma_n A_n)\\
&= -\sigma_i\{\, x_i : \exists x_1 \ldots \exists x_{i-1} \exists y \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \big(R(x_1, \ldots, x_n; y)\ \&\\
&\qquad\qquad (\forall k \in \underline{n} \setminus \{i\})(x_k \in \sigma_k A_k)\ \&\ y \in -\tau B\big)\,\}\\
&= -\sigma_i\{\, x_i : \exists y \big(\exists x_1 \ldots \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \big(R(x_1, \ldots, x_n; y)\ \&\\
&\qquad\qquad (\forall k \in \underline{n} \setminus \{i\})(x_k \in \sigma_k A_k)\big)\ \&\ y \in -\tau B\big)\,\}\\
&= \sigma_i\{\, x_i : \forall y \big(\exists x_1 \ldots \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \big(R(x_1, \ldots, x_n; y)\ \&\\
&\qquad\qquad (\forall k \in \underline{n} \setminus \{i\})(x_k \in \sigma_k A_k)\big) \Rightarrow y \in \tau B\big)\,\}\\
&= \sigma_i\{\, x_i : \forall y (y \in R^{\exists}(\sigma_1 A_1, \ldots, \{x_i\}, \ldots, \sigma_n A_n)) \Rightarrow y \in \tau B\,\},
\end{aligned}$$

woraus sich auch die übrigen Gleichungen ergeben. □

Mehrstellige residuierte Operationen der Form

$$R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}$$

treten (in weniger systematischer Schreibweise) in zahlreichen Anwendungen auf und stehen insbesondere im Mittelpunkt der relationalen Semantik *substruktureller Logiken* (vergleiche für die wichtigsten Signaturen $(\sigma;\tau)$ etwa [80, Kapitel 11]). Anwendungen in der *Linguistik* werden beispielsweise in [61] und [68] betrachtet. Operationen der Form $R^{\exists}$ spielen speziell in der Modallogik (siehe [8]) und im Darstellungssatz für Boolesche Operatoralgebren (BAO) von Jónsson und Tarski [55] eine wichtige Rolle. Das folgende Beispiel betrachtet Abbildungen $R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}$ im Fall $n = 1$.

Beispiel 3.3.13. Es seien X, Y Mengen, $R : X \rightharpoondown Y$ eine binäre Relation und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$ eine Signatur. Für die Abbildungen

$$R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} = \tau \circ R^{\exists} \circ \sigma$$

sind in der relationalen Semantik (oder Kripke-Semantik) der Modallogik und allgemeiner der nichtklassischen Logik auch die folgenden Bezeichnungen üblich, wobei auf der rechten Seite jeweils die Werte für $A \subseteq X$ angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\langle R\rangle &:= R^{\exists}_{(+;+)} = R^{\exists}, & \langle R\rangle A &= \{\, y : \exists x (x\ R\ y\ \&\ x \in A)\,\},\\
[R] &:= R^{\exists}_{(-;-)} = - \circ \langle R\rangle \circ -, & [R]A &= \{\, y : \forall x (x\ R\ y \Rightarrow x \in A)\,\},\\
[R\rangle &:= R^{\exists}_{(+;-)} = - \circ \langle R\rangle, & [R\rangle A &= \{\, y : \forall x (x\ R\ y \Rightarrow x \notin A)\,\},\\
\langle R] &:= R^{\exists}_{(-;+)} = \langle R\rangle \circ - & \langle R]A &= \{\, y : \exists x (x\ R\ y\ \&\ x \notin A)\,\}.
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Residuale sind nach Theorem 3.3.12

$$\begin{aligned}
\langle R\rangle^*_{(+;+)} &= (R^{-1})^{\exists}_{(-;-)} = [R^{\mathrm{d}}], & [R]^*_{(-;-)} &= (R^{-1})^{\exists}_{(+;+)} = \langle R^{\mathrm{d}}\rangle,\\
[R\rangle^*_{(+;-)} &= (R^{-1})^{\exists}_{(+;-)} = [R^{\mathrm{d}}\rangle, & \langle R]^*_{(-;+)} &= (R^{-1})^{\exists}_{(-;+)} = \langle R^{\mathrm{d}}].
\end{aligned}$$

Für $R \subseteq X \times Y$ ist ...	zwischen $\mathfrak{P}X$ und $\mathfrak{P}Y$ eine ...
$(\langle R \rangle, [R^{\mathrm{d}}])$	Adjunktion
$([R], \langle R^{\mathrm{d}} \rangle)$	duale Adjunktion
$([R\rangle, [R^{\mathrm{d}}\rangle)$	Galois-Verbindung
$(\langle R], \langle R^{\mathrm{d}}])$	duale Galois-Verbindung

Tabelle 3.1: Durch Relationen induzierte $(\sigma;\tau)$-Adjunktionen zwischen Potenzmengen

Dies liefert die in Tabelle 3.1 aufgeführten $(\sigma;\tau)$-Adjunktionen zwischen $\mathfrak{P}X$ und $\mathfrak{P}Y$. Insbesondere ist für alle $B \subseteq Y$

$$\langle R^{\mathrm{d}} \rangle B = RB \quad \text{und} \quad [R^{\mathrm{d}}](B) = \{\, x \in X : xR \subseteq B \,\}.$$

Durch $\langle R^{\mathrm{d}} \rangle$ und $[R^{\mathrm{d}}]$ werden in der klassischen Modallogik (für $X = Y$) die logischen Operatoren für Möglichkeit und Notwendigkeit modelliert (siehe [8]). Mit $[R\rangle$ oder $[R^{\mathrm{d}}\rangle$ lassen sich hingegen allgemeine Negationen darstellen, und auch $\langle R]$ und $\langle R^{\mathrm{d}}]$ können logisch interpretiert werden (als „möglicherweise nicht"). Für eine ausführliche Erläuterung dieser Zusammenhänge verweisen wir auf [80] und [23].

Für Funktionen $f\colon X \to Y$ ergibt sich speziell

$$f^{\exists} = \langle f \rangle = f_{\rightarrow} \quad \text{und} \quad (f^{\exists})^* = [f^{\mathrm{d}}] = f_{\leftarrow},$$

woraus die bekannte Tatsache folgt, dass Bild- und Urbild-Funktion von f eine Adjunktion $(f_{\rightarrow}, f_{\leftarrow})$ zwischen $\mathfrak{P}X$ und $\mathfrak{P}Y$ bilden.

Es ist $f_{\leftarrow}(B) = fB$, also $f_{\leftarrow} = (f^{\mathrm{d}})^{\exists} = \langle f^{\mathrm{d}} \rangle$. Demnach ist $f_{\leftarrow}$ nicht nur dual residuiert, sondern auch residuiert, und das Residual $(f_{\leftarrow})^*$ ist gegeben durch

$$(f_{\leftarrow})^*(A) = [f]A = \{\, y \in Y : (f^{\mathrm{d}})^{\exists}(\{y\}) \subseteq A \,\} = \{\, y \in Y : f^{-1}[\{y\}] \subseteq A \,\}$$

für alle $A \subseteq X$.

Beispiel 3.3.14. Für n-stellige Funktionen $f\colon (X_1, \ldots, X_n) \to Y$ ist

$$f^{\exists}(A_1, \ldots, A_n) = f[A_1, \ldots, A_n] = \{\, f(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1,\ \ldots,\ x_n \in A_n \,\}.$$

Ist f speziell eine binäre Operation $\cdot$ auf einer Menge X, also $f \in \mathsf{Rel}(X, X; X)$, so schreibt man auch

$$A \cdot B := f^{\exists}(A, B) = \{\, x \cdot y : x \in A \;\&\; y \in B \,\}$$

und nennt $A \cdot B$ das *Komplexprodukt* von A und B. Die beiden Residuale von $f^{\exists}$ haben dann nach Theorem 3.3.12 die Gestalt

$$(f^{\exists})^{(1)}(C, B) = \{\, x \in X : \{x\} \cdot B \subseteq C \,\},$$
$$(f^{\exists})^{(2)}(A, C) = \{\, y \in X : A \cdot \{y\} \subseteq C \,\}.$$

Dies lässt sich natürlich auch leicht direkt nachprüfen, denn es ist

$$\begin{aligned} A \cdot B \subseteq C \quad &\iff \quad A \subseteq \{\, x \in X : \{x\} \cdot B \subseteq C \,\} \\ &\iff \quad B \subseteq \{\, y \in X : A \cdot \{y\} \subseteq C \,\}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhält man zweistellige residuierte Operationen auf Potenzmengenverbänden, die in zahlreichen Darstellungssätzen residuierter algebraischer Strukturen auftreten, siehe beispielsweise [42].

Im Fall $n = 1$ sind $(\,\cdot\,)^{\exists}$ und $(\,\cdot\,)_{\exists}$ funktoriell:

Korollar 3.3.15. *Seien X, Y, Z Mengen.*

(a) Für alle Relationen $R : X \rightharpoondown Y$, $S : Y \rightharpoondown Z$ gilt

$$(S \circ R)^{\exists} = S^{\exists} \circ R^{\exists} \quad \textit{und} \quad (\mathrm{id}_X)^{\exists} = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}X}.$$

(b) Für alle residuierten Abbildungen $f\colon \mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}Y$, $g\colon \mathfrak{P}Y \to \mathfrak{P}Z$ gilt

$$(g \circ f)_{\exists} = g_{\exists} \circ f_{\exists} \quad \textit{und} \quad (\mathrm{id}_{\mathfrak{P}X})_{\exists} = \mathrm{id}_X.$$

Beweis. Dies folgt aus den Propositionen 3.2.19 und 3.2.20 sowie Lemma 3.3.4. □

Somit induzieren $(\,\cdot\,)^{\exists}$ und $(\,\cdot\,)_{\exists}$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen geeigneten Kategorien.

Definition 3.3.16 (Potenzmengenverbandsfunktor)**.** Es sei $\mathsf{AL}_{\mathfrak{P}}$ diejenige volle Unterkategorie von AL, deren Objekte gerade die Potenzmengenverbände sind. Damit ist die Kategorie $\mathsf{AL}_{\mathfrak{P}}$ der Potenzmengenverbände und residuierten Abbildungen ein Quantaloid.

$\mathfrak{P}\colon \mathsf{Rel} \to \mathsf{AL}_{\mathfrak{P}}$ bezeichne den Funktor, der jeder Menge X den Potenzmengenverband $\mathfrak{P}X = (\mathcal{P}X, \subseteq)$ und jeder Relation $R : X \rightharpoondown Y$ die residuierte Abbildung $\mathfrak{P}R = R^{\exists}$ von $\mathfrak{P}X$ in $\mathfrak{P}Y$ zuordnet.

Proposition 3.3.17. *Die Quantaloide Rel und $\mathsf{AL}_{\mathfrak{P}}$ sind isomorph, und der Potenzmengenverbandsfunktor $\mathfrak{P}\colon \mathsf{Rel} \to \mathsf{AL}_{\mathfrak{P}}$ ist ein Quantaloid-Isomorphismus.*

Den inversen Quantaloid-Homomorphismus erhält man durch $\mathfrak{P}^{-1}(L) = \bigcup |L|$ für Potenzmengenverbände L und $\mathfrak{P}^{-1}(f) = f_{\exists}$ für residuierte Abbildungen f zwischen Potenzmengenverbänden.

Beweis. Mit Theorem 3.3.7 und Korollar 3.3.15. □

Der Isomorphismus $\mathfrak{P}$ lässt sich (mit einem Inklusionsfunktor) leicht zu einer Äquivalenz von Rel und dem Quantaloid der vollständigen atomaren Booleschen Algebren und residuierten Abbildungen ausdehnen. Diese stellt eine Verallgemeinerung der bekannten Äquivalenz von Set und der Kategorie der vollständigen atomaren Booleschen Algebren und residuierten, Atome bewahrenden Abbildungen dar. Denn für eine Relation $R : X \rightharpoondown Y$ bewahrt $\mathfrak{P}R = R^{\exists}$ genau dann Atome (Singletons), d. h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $xR = \{y\}$, wenn R co-adjungiert, d. h. eine Funktion ist. Analog hatten wir aus der Äquivalenz der Quantaloide ARel und AL die bekannte Äquivalenz von Pos und $\mathsf{AL}^{\vee}$ zurückerhalten (siehe Theorem 3.2.25).

3.3.2 Verallgemeinerte Polaritäten

Obwohl durch die verallgemeinerten Axialitäten

$$(R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}, (R^{-1})^{\exists}_{(\sigma;\tau)^{-1}}, \ldots, (R^{-n})^{\exists}_{(\sigma;\tau)^{-n}})$$

bereits alle $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien zwischen Potenzmengenverbänden induziert werden, leiten wir aus ihnen noch eine Variante ab, die in den Anwendungen häufig auftritt. Für eine Relation R verstehen wir unter einer durch R induzierten $(\sigma;\tau)$-*Polarität* eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie zwischen Potenzmengenverbänden, deren Kopf auf die in der folgenden Definition beschriebenen Weise durch R gebildet wird. $(+;+)$-Polaritäten entsprechen dann gerade den im gewöhnlichen Sinne durch Relationen induzierten Polaritäten (siehe [7]).

Definition 3.3.18 (Induzierte verallgemeinerte Polaritäten)**.** Für $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ sei die Funktion $R^{\forall}_{(\sigma;\tau)} \colon (\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{P}X_n) \to \mathfrak{P}Y$ bestimmt durch

$$R^{\forall}_{(\sigma;\tau)} = (R^{\mathrm{c}})^{\exists}_{(\sigma;-\tau)}.$$

Wir schreiben auch $R^{\forall}$ für $R^{\forall}_{([+];+)}$.

Für $f \colon (\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{P}X_n) \to \mathfrak{P}Y$ sei umgekehrt die Relation $f^{(\sigma;\tau)}_{\forall} \in \mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ wie folgt definiert:

$$f^{(\sigma;\tau)}_{\forall} = \big(f^{(\sigma;-\tau)}_{\exists}\big)^{\mathrm{c}}.$$

Auch hier bezeichne $f_{\forall}$ die Relation $f^{([+];+)}_{\forall}$.

Wir zeigen als erstes, wie die Abbildung $R^{\forall}_{(\sigma;\tau)}$ und die Relation $f^{(\sigma;\tau)}_{\forall}$ konkret gebildet werden.

Proposition 3.3.19. *Sei R eine Relation zwischen X_1, …, X_n und Y. Ist $A_i \subseteq X_i$ für alle $i \in \underline{n}$, so gilt*

$$\begin{aligned} R^{\forall}(A_1, \ldots, A_n) &= \{\, y : \forall x (x \in \textstyle\prod_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow R(x;y)) \,\} \\ &= \textstyle\bigcap \{\, R(x;\_) : x \in \prod_{i=1}^{n} A_i \,\} \end{aligned}$$

und $R^{\forall}_{(\sigma;\tau)}(A_1, \ldots, A_n) = -((R^{\mathrm{c}})^{\exists}_{(\sigma;\tau)}(A_1, \ldots, A_n)) = \tau R^{\forall}(\sigma_1 A_1, \ldots, \sigma_n A_n)$, also

$$R^{\forall}_{(\sigma;\tau)} = \tau \circ R^{\forall} \circ \sigma.$$

Beweis. Nach Proposition 3.3.8 ist

$$\begin{aligned} &R^{\forall}_{(\sigma;\tau)}(A_1, \ldots, A_n) = (R^{\mathrm{c}})^{\exists}_{(\sigma;-\tau)}(A_1, \ldots, A_n) = -((R^{\mathrm{c}})^{\exists}_{(\sigma;\tau)}(A_1, \ldots, A_n)) \\ &= -\tau\{\, y : \exists x_1 \ldots \exists x_n (R^{\mathrm{c}}(x_1, \ldots, x_n; y) \;\&\; x_1 \in \sigma_1 A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_n \in \sigma_n A_n) \,\} \\ &= \tau\{\, y : \forall x_1 \ldots \forall x_n ((x_1 \in \sigma_1 A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_n \in \sigma_n A_n) \Rightarrow R(x_1, \ldots, x_n; y)) \,\}. \end{aligned}$$ □

Proposition 3.3.20. *Sei f eine Abbildung von $\mathfrak{P}X_1$, …, $\mathfrak{P}X_n$ in $\mathfrak{P}Y$, und seien $x_i \in X_i$ ($i \in \underline{n}$), $y \in Y$.*

(a) Es gilt genau dann $f^{(\sigma;\tau)}_{\forall}(x_1, \ldots, x_n; y)$, wenn

$$(\exists A_1 \subseteq X_1) \ldots (\exists A_n \subseteq X_n)(x_1 \in A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_n \in A_n \;\&\; y \in \tau f(\sigma_1 A_1, \ldots, \sigma_n A_n))$$

erfüllt ist. Somit ist $f^{(\sigma;\tau)}_{\forall} = (\tau \circ f \circ \sigma)_{\forall}$.

(b) Ist f $(\sigma;-\tau)$-monoton, so gilt $f^{(\sigma;\tau)}_{\forall}(x_1, \ldots, x_n; \_) = \tau f(\sigma_1\{x_1\}, \ldots, \sigma_n\{x_n\})$, im Fall $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ also insbesondere

$$(x_1, \ldots, x_n; y) \in f_{\forall} \iff y \in f(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}).$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.3.10. □

Das nächste Korollar liefert nun für $(\sigma;\tau) = (+;+)$ die bekannte Bijektion zwischen Relationen und Polaritäten, wie sie etwa in [38] dargestellt ist.

Korollar 3.3.21. *Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{Rel}(X;Y)^\tau$ *aller Relationen zwischen* $X_1, \ldots, X_n$ *und* Y *und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;-\tau)}(\mathfrak{P}^n X;\mathfrak{P}Y)$ *aller* $(\sigma;-\tau)$*-residuierten Abbildungen von* $\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{P}X_n$ *in* $\mathfrak{P}Y$

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen

$$R \mapsto R^{\forall}_{(\sigma;\tau)} \quad \textit{und} \quad f \mapsto f^{(\sigma;\tau)}_{\forall}.$$

Beweis. Dies erhält man nach Definition von $R^{\forall}_{(\sigma;\tau)}$ und Theorem 3.3.7, da $R \mapsto R^{\mathrm{c}}$ ein dualer Automorphismus von $\mathsf{Rel}(X;Y)$ ist. □

Die Residuale der $(\sigma;-\tau)$-residuierten Abbildung $R^{\forall}_{(\sigma;\tau)}$ werden folgendermaßen gebildet:

Theorem 3.3.22. *Sei* $R \in \mathsf{Rel}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ *und* $i \in \underline{n}$. *Es gilt*

$$(R^{\forall}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;-\tau)} = (R^{-i})^{\forall}_{(\sigma[i\mapsto\tau];\sigma_i)},$$

und für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$ *und* $B \subseteq Y$ *ist*

$$\begin{aligned}(R^{\forall}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;-\tau)}(A_1,\ldots,B,\ldots,A_n) &= \sigma_i\{\, x_i \in X_i : \tau B \subseteq R^{\forall}(\sigma_1 A_1,\ldots,\{x_i\},\ldots,\sigma_n A_n)\,\}\\ &= \sigma_i\{\, x_i \in X_i : B \subseteq^{\tau} R^{\forall}_{(\sigma;\tau)}(A_1,\ldots,\sigma_i\{x_i\},\ldots,A_n)\,\}.\end{aligned}$$

Speziell für $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ *ist* $(R^{\forall})^{(i)}_{([+];-)} = (R^{-i})^{\forall}$ *sowie*

$$(R^{\forall})^{(i)}_{([+];-)}(A_1,\ldots,B,\ldots,A_n) = \{\, x_i : B \subseteq R^{\forall}(A_1,\ldots,\{x_i\},\ldots,A_n)\,\}.$$

Beweis. Mit $(R^{-i})^{\mathrm{c}} = (R^{\mathrm{c}})^{-i}$ gilt nach Definition von $R^{\forall}_{(\sigma;\tau)}$ und Theorem 3.3.12

$$\begin{aligned}(R^{\forall}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;-\tau)} &= ((R^{\mathrm{c}})^{\exists}_{(\sigma;-\tau)})^{(i)}_{(\sigma;-\tau)} = ((R^{\mathrm{c}})^{-i})^{\exists}_{(\sigma;-\tau)^{-i}} = ((R^{-i})^{\mathrm{c}})^{\exists}_{(\sigma[i\mapsto\tau];-\sigma_i)}\\ &= (R^{-i})^{\forall}_{(\sigma[i\mapsto\tau];\sigma_i)}.\end{aligned}$$

Auch die übrigen Gleichungen ergeben sich mit Theorem 3.3.12. □

Für jede Relation $R \in \mathsf{Rel}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ ist somit

$$(R^{\forall}, (R^{-1})^{\forall}, \ldots, (R^{-n})^{\forall})$$

eine $([+];-)$-residuierte Familie über $\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{P}X_n$ und $\mathfrak{P}Y$. Dies folgt auch aus der nächsten Feststellung.

Korollar 3.3.23. *Sei* R *eine Relation zwischen den Mengen* $X_1, \ldots, X_n$ *und* Y. *Für alle* $i \in \underline{n}$ *und alle* $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n})$, $B \subseteq Y$ *gilt:*

$$\begin{aligned}B \subseteq R^{\forall}(A_,\ldots,A_i,\ldots,A_n) &\iff A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n \times B \subseteq R\\ &\iff A_i \subseteq (R^{-i})^{\forall}(A_1,\ldots,B,\ldots,A_n).\end{aligned}$$

Beweis. Proposition 3.3.19 liefert die erste Äquivalenz wegen

$$B \subseteq R^{\forall}(A_1, \ldots, A_n) \iff \forall y \forall x\big((y \in B \;\&\; x \in \textstyle\prod_{k=1}^{n} A_k) \Rightarrow (x; y) \in R\big).$$

Die zweite ergibt sich analog oder aus der ersten mit $(R^{-i})^{\forall} = (R^{\forall})^{(i)}_{([+];-)}$. □

Beispiel 3.3.24. Seien X, Y Mengen. Für eine binäre Relation $R : X \rightharpoondown Y$ ist $(R^{\forall}, (R^{\mathrm{d}})^{\forall})$ eine Galois-Verbindung zwischen $\mathfrak{P}X$ und $\mathfrak{P}Y$, die unter anderem in der Formalen Begriffsanalyse (siehe [44]) eine zentrale Rolle spielt. Es ist

$$(R^{\forall})^{*}_{(+;-)} = (R^{\mathrm{d}})^{\forall},$$

und für alle $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ gilt

$$R^{\forall}(A) = A^{R} \quad \text{und} \quad (R^{\forall})^{*}_{(+;-)}(B) = B_{R}.$$

Außerdem ist $R^{\forall} = [R^{\mathrm{c}}\rangle$.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit zwei einfachen Feststellungen zu $R^{\exists}$ und $R^{\forall}$.

Korollar 3.3.25. *Seien X_1, …, X_{n+1} Mengen. Für jedes $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; X_{n+1})$ und alle $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \prod_{k=1}^{n+1} X_k$ gilt*

$$R^{\exists}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}) = R(x_1, \ldots, x_n, \_) = R^{\forall}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})$$

und allgemeiner

$$\begin{aligned} R(x_1, \ldots, x_{i-1}, \_, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) &= (R^{-i})^{\exists}(\{x_1\}, \ldots, \{x_{i-1}\}, \{x_{n+1}\}, \{x_{i+1}\}, \ldots, \{x_n\}) \\ &= (R^{-i})^{\forall}(\{x_1\}, \ldots, \{x_{i-1}\}, \{x_{n+1}\}, \{x_{i+1}\}, \ldots, \{x_n\}) \end{aligned}$$

für alle $i \in \underline{n+1}$.

Beweis. Nach Korollar 3.3.9 und Proposition 3.3.19. □

Proposition 3.3.26. *Sei $x \in \prod X$ und $i \in \underline{n}$. Für jede Relation $R \in \mathsf{Rel}(X; Y)$ gilt*

$$(R^{x}_{i})^{\exists} = (R^{\exists})_{i}^{(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})} \quad \textit{und} \quad (R^{x}_{i})^{\forall} = (R^{\forall})_{i}^{(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})}.$$

Beweis. Für alle $A_i \subseteq X_i$ ist

$$\begin{aligned} (R^{x}_{i})^{\exists}(A_i) &= \{\, y : \exists a_i (a_i \in A_i \;\&\; R^{x}_{i}(a_i; y)) \,\} \\ &= \{\, y : \exists a_i (a_i \in A_i \;\&\; R(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n; y)) \,\} \\ &= R^{\exists}(\{x_1\}, \ldots, A_i, \ldots, \{x_n\}) = (R^{\exists})_{i}^{(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})}(A_i), \end{aligned}$$

und die Behauptung für $(\,\cdot\,)^{\forall}$ zeigt man genauso. □

4 Hüllenstrukturen

Nachdem in den vorigen beiden Kapiteln die Theorie der $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen entwickelt wurde, wenden wir uns nun den Hüllenstrukturen zu. Unter diesen verstehen wir geordnete Mengen, die mit einer Hüllenoperation versehen sind. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf *Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen* und den aus ihnen auf kanonische Weise induzierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen. Das nächste Kapitel verbindet dann Hüllenstrukturen mit der allgemeinen Residuiertheit, indem es speziell die $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen geeigneten Hüllenstrukturen zum Gegenstand hat.

Im folgenden werden zunächst einige Grundlagen zu Hüllenstrukturen selbst und zur Realisierung vollständiger Verbände durch Hüllenbereiche dargestellt. Danach betrachten wir das Induzieren von Abbildungen zwischen Hüllenbereichen. In diesem Rahmen werden einige zentrale Grundbegriffe eingeführt, darunter stetige, abgeschlossene und bindende Abbildungen. Die Beziehungen zwischen diesen Grundbegriffen werden ausführlich untersucht: zuerst allgemein und anschließend sowohl für isotone als auch für antitone Abbildungen. Dabei interessieren uns jeweils auch bijektive Korrespondenzen von bestimmten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen mit geeigneten Abbildungen zwischen den zugrundeliegenden Hüllenstrukturen. Zum Schluss des Kapitels behandeln wir schließlich noch eine nützliche Konstruktion für Quantaloide und ihren Zusammenhang mit der Stetigkeit.

4.1 Grundlagen

4.1.1 Grundbegriffe für Hüllenstrukturen

Wir beginnen mit einer Reihe von Definitionen und Schreibweisen für Hüllenstrukturen.

Definition 4.1.1 (Hüllenstrukturen, Hüllenbereiche)**.** Ein Tripel $C = (X, \leq, \gamma)$ heißt *Hüllenstruktur*, falls $(X, \leq)$ eine geordnete Menge und γ eine Hüllenoperation auf $(X, \leq)$ ist. Wir schreiben γ_C für die Hüllenoperation γ von C und bezeichnen die zugrundeliegende Menge X von C wie üblich mit $|C|$. Außerdem stehe $C_\leq := (X, \leq)$ für die zugrundeliegende geordnete Menge[1] von C.

Für eine Hüllenstruktur C sei der *Hüllenbereich* von C der von γ_C erzeugte Hüllenbereich $C_\gamma := (\gamma_C[|C|], \leq)$.

Konvention 4.1.2 (Schreibweisen für Hüllenstrukturen)**.** Für Hüllenstrukturen C schreiben wir in ordnungstheoretischen Zusammenhängen statt $C_\leq$ meistens nur C, beispielsweise $\leq_C$ für $\leq_{C_\leq}$ und $\downarrow_C$ für $\downarrow_{C_\leq}$. Somit ist

$$C = (C_\leq, \gamma_C) = (|C|, \leq_C, \gamma_C).$$

1 Eine Verwechslung mit der Schreibweise $B_\leq$ für eine Menge B und eine Relation $\leq$ (siehe Notation 1.1.2) wird durch den Zusammenhang ausgeschlossen.

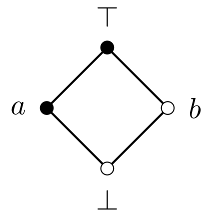

Abbildung 4.1: Diagramm einer Hüllenstruktur

Für Hüllenstrukturen C und D bezeichnet $\mathsf{res}(C; D)$ entsprechend die geordnete Menge aller residuierten Abbildungen von $C_\leq$ in $D_\leq$. Darüber hinaus verwenden wir die in Konventionen 1.2.3 erwähnten Schreibweisen auch für Hüllenstrukturen, schreiben also etwa $x \in C$ anstelle von $x \in |C|$ und $f: C \to D$ für $f: |C| \to |D|$.

Da die Hüllenoperationen auf einer geordneten Menge in Bijektion mit den Hüllensystemen stehen (siehe Proposition 1.2.27), könnten Hüllenstrukturen alternativ in der Form $C = (X, \leq, M)$ angegeben werden, wobei M ein Hüllensystem von $(X, \leq)$ ist. Somit ließe sich jede Hüllenstruktur C auch durch zwei geordnete Mengen, nämlich $C_\leq$ und C_γ, beschreiben. Wir bevorzugen jedoch die Variante $C = (|C|, \leq_C, \gamma_C)$ mit einer Hüllenoperation.

Konvention 4.1.3 (Diagramme von Hüllenstrukturen)**.** Endliche Hüllenstrukturen C werden folgendermaßen als Diagramm dargestellt: Es wird ein gewöhnliches Diagramm der zugrundeliegenden geordneten Menge $C_\leq$ gezeichnet, in dem für abgeschlossene Elemente (d. h. für Elemente des Hüllenbereichs C_γ) ausgefüllte Kreise verwendet werden.

Abbildung 4.1 zeigt eine Hüllenstruktur C mit $\gamma_C(\bot) = a$, $\gamma_C(a) = a$, $\gamma_C(b) = \top$ und $\gamma_C(\top) = \top$, die im folgenden häufiger als Beispiel eingesetzt wird.

Als nächstes betrachten wir Produkte von Hüllenstrukturen und einige dazugehörende Notationen.

Lemma 4.1.4. *Sei $C = (\, C_i : i \in I \,)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Das Produkt $\prod_{i\in I} \gamma_{C_i}$ der zugehörigen Hüllenoperationen ist selbst eine Hüllenoperation auf dem Produkt $\prod_{i\in I}(C_i)_\leq$ der zugrundeliegenden geordneten Mengen.*

Beweis. Nach Definition der Produktordnung übertragen sich die Isotonie, Extensivität und (abgeschwächte) Idempotenz aller Faktoren γ_{C_i} offensichtlich auf ihr Produkt. Wir zeigen exemplarisch die letzte Behauptung: Wegen $\gamma_{C_i} \circ \gamma_{C_i} \leq \gamma_{C_i}$ für alle $i \in I$ ist $\prod_{i\in I} \gamma_{C_i} \circ \prod_{i\in I} \gamma_{C_i} = \prod_{i\in I}(\gamma_{C_i} \circ \gamma_{C_i}) \leq \prod_{i\in I} \gamma_{C_i}$. □

Definition 4.1.5 (Produkte von Hüllenstrukturen)**.** Sei $C = (\, C_i : i \in I \,)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Das *Produkt* von C sei die Hüllenstruktur

$$\prod C := \left(\prod_{i\in I}(C_i)_\leq, \prod_{i\in I} \gamma_{C_i}\right).$$

Außerdem verwenden wir die Schreibweisen

$$\gamma_C := (\, \gamma_{C_i} : i \in I \,) \quad \text{und} \quad C_\gamma := (\, (C_i)_\gamma : i \in I \,).$$

Damit ist $\prod \gamma_C = \gamma_{\prod C}$ die Hüllenoperation von $\prod C$, und für den Hüllenbereich von $\prod C$ gilt $(\prod C)_\gamma = \prod C_\gamma$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\gamma_C"] \arrow[dr, "\gamma_C^\bullet"'] & & C \\
& C_\gamma \arrow[ur, "\gamma_C^\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4.2: Co-Restriktion und Restriktion einer Hüllenoperation γ_C

Im Fall $I = \emptyset$ ergibt sich das leere Produkt $(\mathbf{1}, 1) = (1, \leq, \mathrm{id}_1)$, welches auch mit $\mathbf{1}$ bezeichnet wird. Es ist dann $\mathbf{1}_\gamma = (1, \leq) = \mathbf{1}$.

Wir übertragen alle Schreibweisen und Konventionen für Produkte von Mengen bzw. geordneten Mengen auch auf Produkte von Hüllenräumen (siehe Definition 1.1.7 und vor allem Definition 1.2.16). Insbesondere werden dann nullstellige Abbildungen $x \colon \mathbf{1} \to C$ zwischen Hüllenstrukturen mit Elementen $x \in C$ identifiziert.

Für Hüllenoperationen γ_C werden im folgenden häufig die in Abbildung 4.2 gezeigten Notationen $\gamma_C^\bullet$ für die Co-Restriktion auf C_γ und γ_C° für die Inklusionsabbildung (wegen der Idempotenz identisch mit der Restriktion von γ_C auf C_γ) eingesetzt. Aus bereits früher erwähnten Fakten ergibt sich:

Lemma 4.1.6. *Sei C eine Hüllenstruktur. Die Co-Restriktion $\gamma_C^\bullet \colon C \to C_\gamma$ und die Restriktion (Inklusionsabbildung) $\gamma_C^\circ \colon C_\gamma \to C$ bilden eine Adjunktion $(\gamma_C^\bullet, \gamma_C^\circ)$ mit*

$$\gamma_C^\circ \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_C, \qquad \gamma_C^\bullet \circ \gamma_C^\circ = \mathrm{id}_{C_\gamma}, \qquad \gamma_C^\bullet \circ \gamma_C = \gamma_C^\bullet, \qquad \gamma_C \circ \gamma_C^\circ = \gamma_C^\circ.$$

Beweis. Nach Lemma 1.2.42 und aufgrund der Idempotenz von Hüllenoperationen. □

Wir führen nun einige Eigenschaften von Hüllenstrukturen ein, die im weiteren Verlauf oft benötigt werden.

Definition 4.1.7 (Eigenschaften von Hüllenstrukturen)**.** Eine Hüllenstruktur C heißt

- *vollständig*, falls $C_\leq$ ein vollständiger Verband ist;
- *superalgebraisch*, falls $C_\leq$ ein superalgebraischer Verband ist;
- *monoton*, falls $C_\leq$ ein Abschnittsverband $\mathfrak{A}P$ für eine quasigeordnete Menge P ist;
- *klassisch*, falls $C_\leq$ ein Potenzmengenverband $\mathfrak{P}X$ für eine Menge X ist;
- *residuiert*, falls γ_C residuiert ist;
- *residual*, falls γ_C residual (d. h. dual residuiert) ist.

Für jede Hüllenstruktur C gelten offensichtlich die Implikationen

$$C \text{ klassisch} \implies C \text{ monoton} \implies C \text{ superalgebraisch} \implies C \text{ vollständig}.$$

Residuierte bzw. residuale Hüllenstrukturen können auch folgendermaßen beschrieben werden (vergleiche Proposition 1.2.43 für eine weitere Charakterisierung residuierter Hüllenoperationen):

Proposition 4.1.8. *Sei C eine Hüllenstruktur. Es gilt:*

$$\begin{aligned} \gamma_C \textit{ residuiert} &\iff \gamma_C^\circ \textit{ residuiert,} \\ \gamma_C \textit{ dual residuiert} &\iff \gamma_C^\bullet \textit{ dual residuiert.} \end{aligned}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“: $(\gamma_C^\bullet, \gamma_C^\circ)$ ist eine Adjunktion, und es gilt $\gamma_C = \gamma_C^\circ \circ \gamma_C^\bullet$. Also ist mit γ_C° auch γ_C residuiert, und mit $\gamma_C^\bullet$ ist auch γ_C dual residuiert.

„$\Rightarrow$“: Ist γ_C dual residuiert, so erhält man durch $f := (\gamma_C)_* \circ \gamma_C^\circ$ eine untere Adjungierte von $\gamma_C^\bullet$, denn f ist isoton und nach Voraussetzung gilt $f \circ \gamma_C^\bullet = (\gamma_C)_* \circ \gamma_C^\circ \circ \gamma_C^\bullet = (\gamma_C)_* \circ \gamma_C \leq \mathrm{id}_C$ sowie $\gamma_C^\bullet \circ f = \gamma_C^\bullet \circ (\gamma_C)_* \circ \gamma_C^\circ = \gamma_C^\bullet \circ \gamma_C \circ (\gamma_C)_* \circ \gamma_C \circ \gamma_C^\circ = \gamma_C^\bullet \circ \gamma_C \circ \gamma_C^\circ = \gamma_C^\bullet \circ \gamma_C^\circ = \mathrm{id}_{C_\gamma}$. Ist γ_C residuiert, so sieht man analog, dass $g := \gamma_C^\bullet \circ (\gamma_C)^*$ eine obere Adjungierte von γ_C° ist. □

Lemma 4.1.9. *Sei C eine Hüllenstruktur.*

(a) Für jeden $\bigvee$-Erzeuger J von C ist die Bildmenge $\gamma_C[J]$ ein $\bigvee$-Erzeuger von C_γ.

(b) Ist C residual, so ist auch für jeden $\bigwedge$-Erzeuger M von C die Bildmenge $\gamma_C[M]$ ein $\bigwedge$-Erzeuger von C_γ.

Beweis. Wegen $\gamma_C[J] = \gamma_C^\bullet[J]$ und Proposition 1.2.37. □

Die nächsten beiden Feststellungen beziehen sich auf vollständige Hüllenstrukturen, danach betrachten wir spezieller die superalgebraischen. Der Hüllenbereich einer vollständigen Hüllenstruktur ist bekanntlich wieder ein vollständiger Verband, und für die Bildung von Suprema und Infima im Hüllenbereich sei an Proposition 1.2.30 erinnert.

Lemma 4.1.10. *Sei C eine vollständige Hüllenstruktur. Dann ist für alle $A \subseteq C$*

$$\gamma_C(\bigvee\nolimits_C \gamma_C[A]) = \gamma_C(\bigvee\nolimits_C A) \quad \textit{und} \quad \gamma_C(\bigwedge\nolimits_C A) \leq \gamma_C(\bigwedge\nolimits_C \gamma_C[A]) = \bigwedge\nolimits_C \gamma_C[A].$$

Beweis. Da $\gamma_C^\bullet : C \to C_\gamma$ residuiert ist, gilt $\gamma_C^\bullet(\bigvee_C A) = \bigvee_{C_\gamma} \gamma_C^\bullet[A] = \gamma_C(\bigvee_C \gamma_C[A])$, und die zweite Aussage ist klar. □

Aus Proposition 4.1.8 ergibt sich, dass eine vollständige Hüllenstruktur C genau dann residuiert (bzw. residual) ist, wenn γ_C° (bzw. $\gamma_C^\bullet$) ein vollständiger Homomorphismus ist. Außerdem gilt:

Proposition 4.1.11. *Eine vollständige Hüllenstruktur C ist genau dann residuiert, wenn $|C_\gamma|$ eine $\bigvee$-abgeschlossene Teilmenge (und somit C_γ ein vollständiger Unterverband) von $C_\leq$ ist.*

Beweis. Nach Lemma 4.1.10 gilt für alle $A \subseteq C$

$$\bigvee\nolimits_C \gamma_C[A] \in C_\gamma \iff \gamma_C(\bigvee\nolimits_C \gamma_C[A]) = \bigvee\nolimits_C \gamma_C[A] \iff \gamma_C(\bigvee\nolimits_C A) = \bigvee\nolimits_C \gamma_C[A].$$ □

4.1.2 Hüllenbereiche und vollständige Verbände

Superalgebraische Hüllenstrukturen spielen erst im nächsten Kapitel eine größere Rolle. Wir stellen aber bereits an dieser Stelle einige nützliche Informationen über sie zusammen. Besonders interessiert uns dabei die Realisierung vollständiger Verbände durch Hüllenbereiche von superalgebraischen Hüllenstrukturen.

Unter den möglichen Attributen superalgebraischer Hüllenstrukturen sind die folgenden drei erwähnenswert.

Definition 4.1.12 (Eigenschaften superalgebraischer Hüllenstrukturen)**.** Eine superalgebraische Hüllenstruktur C heißt

- *differenziert*, falls $\gamma_C \restriction \mathcal{S}C$ injektiv ist
(d. h. $\gamma_C(u) = \gamma_C(v) \Rightarrow u = v$ für alle $u, v \in \mathcal{S}C$);
- *diskret*, falls $\gamma_C \restriction \mathcal{S}C = \mathrm{id}_C \restriction \mathcal{S}C$ ist
(d. h. $\gamma_C(u) = u$ für jedes $u \in \mathcal{S}C$);
- *reduziert*, falls $\gamma_C[\mathcal{S}C] \subseteq \mathcal{J}(C_\gamma)$ gilt
(d. h. $\gamma_C(u)$ ist $\bigvee$-irreduzibel in C_γ für jedes $u \in \mathcal{S}C$).

Für jede superalgebraische Hüllenstruktur C folgt unmittelbar aus der Definition

$$C \text{ diskret} \quad \Longrightarrow \quad C \text{ differenziert.}$$

Da $\gamma_C[\mathcal{S}C]$ nach Lemma 4.1.9 ein $\bigvee$-Erzeuger von C_γ ist, erhält man außerdem:

Lemma 4.1.13. *Eine superalgebraische Hüllenstruktur C ist genau dann reduziert, wenn $\gamma_C[\mathcal{S}C] = \mathcal{J}(C_\gamma)$ gilt. In diesem Fall ist C_γ ein basierter Verband.* □

Wie bereits erwähnt, sind Hüllenbereiche von vollständigen Hüllenstrukturen wieder vollständige Verbände. Umgekehrt ist für jeden vollständigen Verband L natürlich (L, id_L) eine vollständige Hüllenstruktur (mit dem Hüllenbereich L).

Interessanter ist, dass bereits die superalgebraischen Hüllenstrukturen genügen, um alle vollständigen Verbände als Hüllenbereiche zu erhalten. Das ist einer der Gründe, warum superalgebraische Hüllenstrukturen später von Bedeutung sind. Bevor wir die Behauptung beweisen, verschaffen wir uns mit der nächsten Proposition zwei wichtige Klassen von Beispielen für superalgebraische Hüllenstrukturen. Ohne Schwierigkeiten lässt sich zeigen:

Proposition 4.1.14. *Sei P eine quasigeordnete Menge. Mit dem Schnittoperator von P und seiner (Co-)Restriktion, also*

$$\Delta_P \colon \mathfrak{P}|P| \to \mathfrak{P}|P| \quad \textit{und} \quad \Delta_P^{\downarrow} \colon \mathfrak{A}P \to \mathfrak{A}P$$

(siehe Definition 1.2.2), ergeben sich die folgenden Aussagen.

(a) $(\mathfrak{P}|P|, \Delta_P)$ *ist eine differenzierte klassische Hüllenstruktur.*

(b) $(\mathfrak{A}P, \Delta_P^{\downarrow})$ *ist eine diskrete monotone Hüllenstruktur.*

(c) Die zugehörigen Hüllenbereiche sind identisch:

$$(\mathfrak{P}|P|, \Delta_P)_\gamma = \mathfrak{N}P = (\mathcal{N}P, \subseteq) = (\mathfrak{A}P, \Delta_P^{\downarrow})_\gamma.$$

Ist L ein vollständiger Verband, so ist $\mathcal{N}L = \{ \downarrow_L x : x \in L \}$ und somit der Hüllenbereich $(\mathfrak{P}|L|, \Delta_L)_\gamma = (\mathfrak{A}L, \Delta_L^\downarrow)_\gamma$ isomorph zu L. □

Nun zur angekündigten Realisierung vollständiger Verbände durch Hüllenbereiche superalgebraischer Hüllenstrukturen.

Theorem 4.1.15. *Die Hüllenbereiche (beliebiger, differenzierter oder sogar diskreter) superalgebraischer Hüllenstrukturen sind genau die vollständigen Verbände.*

Beweis. Für jede superalgebraische Hüllenstruktur C ist C_γ ein vollständiger Verband.

Sei umgekehrt L ein vollständiger Verband. Laut Proposition 4.1.14 ist $(\mathfrak{A}L, \Delta_L^\downarrow)$ eine (diskrete und damit auch differenzierte) superalgebraische Hüllenstruktur, deren Hüllenbereich isomorph zu L ist. Ersetzt man die geordnete Teilmenge $\mathfrak{N}L$ von $\mathfrak{A}L$ durch die isomorphe Kopie L und modifiziert die Hüllenoperation $\Delta_L^\downarrow$ entsprechend, so erhält man eine diskrete superalgebraische Hüllenstruktur C mit $C_\gamma = L$. □

Als nächstes schränken wir die Klasse der superalgebraischen Hüllenstrukturen auf die residuierten bzw. residualen ein und charakterisieren die entstehenden Hüllenbereiche.

Theorem 4.1.16. *Sei C eine superalgebraische Hüllenstruktur. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) C ist residuiert.

(2) C_γ ist superalgebraisch und $\gamma_C[\mathcal{S}C] = \mathcal{S}C_\gamma$.

(3) $\gamma_C[\mathcal{S}C] \subseteq \mathcal{S}C_\gamma$.

(4) $\gamma_C(x) = \bigvee_C \{ \gamma_C(u) : u \in \downarrow x \cap \mathcal{S}C \}$.

Beweis. (1) ⇒ (2): Sei C eine residuierte, superalgebraische Hüllenstruktur. Zunächst ist $\gamma_C[\mathcal{S}C]$ ein $\bigvee$-Erzeuger von C_γ. Außerdem gilt $\gamma_C[\mathcal{S}C] \subseteq \mathcal{S}C_\gamma$ (und damit auch $\gamma_C[\mathcal{S}C] = \mathcal{S}C_\gamma$), denn für jedes $u \in \mathcal{S}C$ und alle $A \subseteq C_\gamma$ ergibt sich

$$\gamma_C(u) \le \textstyle\bigvee_{C_\gamma} A \iff u \le \bigvee_{C_\gamma} A = \bigvee_C A \iff u \in \downarrow_C A \iff \gamma_C(u) \in \downarrow_{C_\gamma} A,$$

d. h. $\gamma_C(u)$ ist $\bigvee$-prim in C_γ.

(2) ⇒ (3) ist klar. (3) ⇔ (1) sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\gamma_C[\mathcal{S}C] \subseteq \mathcal{S}C_\gamma &\iff (\forall u \in \mathcal{S}C)(\forall A \subseteq C)\big(\gamma_C(u) \le \textstyle\bigvee_{C_\gamma} \gamma_C[A] \Leftrightarrow \gamma_C(u) \in \downarrow_{C_\gamma}\gamma_C[A]\big)\\
&\iff (\forall A \subseteq C)(\forall u \in \mathcal{S}C)\big(u \le \gamma_C(\textstyle\bigvee_C A) \Leftrightarrow u \in \downarrow_C \gamma_C[A]\big)\\
&\iff (\forall A \subseteq C)(\forall u \in \mathcal{S}C)\big(u \le \gamma_C(\textstyle\bigvee_C A) \Leftrightarrow u \le \bigvee_C \gamma_C[A]\big)\\
&\iff (\forall A \subseteq C)\big(\gamma_C(\textstyle\bigvee_C A) = \bigvee_C \gamma_C[A]\big)\\
&\iff \gamma_C \text{ residuiert.}
\end{aligned}$$

(1) ⇔ (4) folgt bereits aus Korollar 3.1.21. □

Korollar 4.1.17. *(a) Die Hüllenbereiche (beliebiger, differenzierter oder diskreter) residuierter, superalgebraischer Hüllenstrukturen sind genau die superalgebraischen Verbände.*

(b) Jede residuierte, superalgebraische Hüllenstruktur ist auch reduziert.

(c) *Eine superalgebraische Hüllenstruktur C ist genau dann residuiert und diskret, wenn $\gamma_C = \mathrm{id}_C$ gilt.*

Beweis. Zu (a). Nach Theorem 4.1.16 ist der Hüllenbereich einer residuierten, superalgebraischen Hüllenstruktur wieder superalgebraisch. Umgekehrt ist trivialerweise jeder superalgebraische Verband L Hüllenbereich der diskreten residuierten superalgebraischen Hüllenstruktur (L, id_L).

Zu (b). Dies ergibt sich aus Theorem 4.1.16, da jedes $\bigvee$-prime Element insbesondere $\bigvee$-irreduzibel ist.

Zu (c). Ist C eine superalgebraische Hüllenstruktur, so folgt aus $\gamma_C \restriction \mathcal{S}C = \mathrm{id}_C \restriction \mathcal{S}C$ schon $\gamma_C = \mathrm{id}_C$, falls γ_C residuiert ist. □

In Vorbereitung auf das nächste Theorem charakterisieren wir volldistributive Verbände mit Hilfe geeigneter superalgebraischer Hüllenstrukturen:

Proposition 4.1.18. *Ein vollständiger Verband L ist genau dann volldistributiv, wenn die diskrete monotone Hüllenstruktur $(\mathfrak{A}L, \Delta_L^{\downarrow})$ residual ist.*

Beweis. Nach [39, Theorem 2.3] (vergleiche auch die spätere Proposition 6.1.22) gilt, dass für jede quasigeordnete Menge P der Hüllenbereich $(\mathfrak{A}P, \Delta_P^{\downarrow})_\gamma$ genau dann volldistributiv ist, wenn $\Delta_P^{\downarrow}$ dual residuiert ist. Für vollständige Verbände L folgt daraus wegen $(\mathfrak{A}L, \Delta_L^{\downarrow})_\gamma \cong L$ die Behauptung. □

Theorem 4.1.19. *Die Hüllenbereiche (beliebiger, differenzierter oder diskreter) residualer, superalgebraischer Hüllenstrukturen sind genau die volldistributiven Verbände.*

Beweis. Bekanntlich ist ein vollständiger Verband genau dann volldistributiv, wenn er das Bild eines Abschnittsverbands unter einem vollständigen Homomorphismus ist (siehe etwa [37, Theorem 2.6] für einen Beweis). Nach Theorem 3.1.13 sind die volldistributiven Verbände somit auch genau die Bilder superalgebraischer Verbände unter vollständigen Homomorphismen.

Ist nun C eine residuale, superalgebraische Hüllenstruktur, so ist die residuierte Abbildung $\gamma_C^{\bullet} \colon C \to C_\gamma$ nach Proposition 4.1.8 außerdem dual residuiert, also ein vollständiger Homomorphismus. Folglich ist C_γ volldistributiv.

Ist umgekehrt L ein volldistributiver Verband, so lässt sich wegen $(\mathfrak{A}L, \Delta_L^{\downarrow})_\gamma \cong L$ nach Proposition 4.1.18 eine (diskrete) residuale, superalgebraische Hüllenstruktur mit Hüllenbereich L konstruieren. □

Ist C eine superalgebraische Hüllenstruktur mit einer Hüllenoperation, die zumindest binäre Infima erhält, so ist $C_\leq$ insbesondere ein Rahmen (eine vollständige Heyting-Algebra, vergleiche Beispiel 2.2.16) und γ_C ein sogenannter Nukleus. Wie man weiß, ist somit der Hüllenbereich C_γ ebenfalls ein Rahmen. Dies folgt auch aus dem späteren Beispiel 5.3.18.

Da ein vollständiger Verband L außerdem genau dann ein Rahmen ist, wenn die Hüllenoperation $\Delta_L^{\downarrow} \colon \mathfrak{A}L \to \mathfrak{A}L$ binäre Infima erhält (für einen Beweis siehe [39, Theorem 2.1]), folgt wegen $L \cong (\mathfrak{A}L, \Delta_L^{\downarrow})$ insgesamt: Die Hüllenbereiche (beliebiger, differenzierter oder diskreter) superalgebraischer Hüllenstrukturen mit $\wedge$-erhaltender Hüllenoperation sind genau die Rahmen.

Später werden wir in den Beispielen 5.3.18 und 5.3.20 auch sehen, dass für Hüllenstrukturen C, die eine Heyting-Algebra mit $\wedge$-erhaltender Hüllenoperation sind, die mögliche

Gestalt von γ_C recht beschränkt ist: Bezeichnet $\supset$ das Konditional (das zweite Residual des Infimums) in C, so ist für alle $x \in C$

$$\gamma_C(x) \leq (x \supset \gamma_C(\perp)) \supset \gamma_C(\perp).$$

Falls C ein Boolescher Verband mit $\wedge$-erhaltender Hüllenoperation ist, gilt sogar

$$\gamma_C(x) = x \vee \gamma_C(\perp).$$

4.2 Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen

In diesem Abschnitt beginnen wir mit der Untersuchung von zunächst beliebigen Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen und kanonisch induzierten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen. Im nächsten Abschnitt werden dann spezieller die isotonen bzw. antitonen Abbildungen in dieser Hinsicht betrachtet, und in Kapitel 5 wird schließlich die Theorie der $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen entwickelt.

Im Laufe der weiteren Ausführungen werden für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen die folgenden zentralen Eigenschaften erklärt:

stetig, schwach stetig, abgeschlossen, stark abgeschlossen,
bindend, innenbindend, außenbindend
und σ-vollstetig.

Auf diese Begriffe beziehen wir uns im folgenden auch als *Grundbegriffe* für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen.

4.2.1 Pfeil-Operatoren und Grundbegriffe für Abbildungen

Seien C und D Hüllenstrukturen. Aus einer gegebenen Abbildung $f\colon C \to D$ lässt sich auf kanonische Weise eine Abbildung $\overrightarrow{f}: C_\gamma \to D_\gamma$ zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen induzieren, indem die Hüllen gebildet werden:

$$\overrightarrow{f}(c) = \gamma_D(f(c)) \quad \text{für alle } c \in C_\gamma.$$

Umgekehrt ist es für eine Abbildung $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ zwischen Hüllenbereichen naheliegend, sie durch

$$\overleftarrow{\varphi}(x) = \varphi(\gamma_C(x)) \quad \text{für alle } x \in C$$

zu einer Abbildung $\overleftarrow{\varphi}: C \to D$ zwischen den Hüllenstrukturen fortzusetzen.

Die Forderung, dass die induzierte Abbildung $\overrightarrow{f}$ durch bloße Restriktion aus f entsteht, also $\overrightarrow{f}(\gamma_C(x)) = f(\gamma_C(x))$ für jedes $x \in C$ gilt, führt auf den Begriff der *Abgeschlossenheit* von f, da in diesem Fall die Bilder abgeschlossener Elemente unter f wieder abgeschlossen sind. Erfüllt die Funktion f sogar

$$\overrightarrow{f}(\gamma_C(x)) = f(x) \quad \text{für alle } x \in C,$$

so wird sie im folgenden *bindend* genannt. Gilt hingegen $\overrightarrow{f}(\gamma_C(x)) = \gamma_D(f(x))$ für alle $x \in C$, so sprechen wir von der *Stetigkeit* von f.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f", "\overleftarrow{\varphi}"'] \arrow[d, shift right, "\gamma^\bullet_C"'] & & D \arrow[d, shift right, "\gamma^\bullet_D"'] \\
C_\gamma \arrow[u, shift right, "\gamma^\circ_C"'] \arrow[rr, "\overrightarrow{f}", "\varphi"'] & & D_\gamma \arrow[u, shift right, "\gamma^\circ_D"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4.3: Induzierte Abbildungen zwischen Hüllenbereichen

Die beschriebenen Pfeil-Operatoren $f \mapsto \overrightarrow{f}$ und $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ bilden zusammen mit den drei Eigenschaften stetig, abgeschlossen und bindend den Grundstock der folgenden Untersuchungen. Die Zusammenhänge dieser und der weiteren Grundbegriffe für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen werden besonders transparent, wenn sie elementfrei beschrieben werden. Wo immer es möglich ist, bevorzugen wir daher eine elementfreie Darstellung, und geben dementsprechend als erstes eine elementfreie Definition der Pfeil-Operatoren und der drei erwähnten Grundbegriffe (und dies gleich allgemein für mehrstellige Funktionen). Die Ausgangssituation ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Definition 4.2.1 (Induzierte Abbildungen)**.** Sei $(C; D) = (C_1, \ldots, C_n; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Für $f\colon C \to D$ sei $\overrightarrow{f}\colon C_\gamma \to D_\gamma$ definiert durch

$$\overrightarrow{f} = \gamma^\bullet_D \circ f \circ \gamma^\circ_C,$$

und für $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ sei $\overleftarrow{\varphi}\colon C \to D$ festgelegt durch

$$\overleftarrow{\varphi} = \gamma^\circ_D \circ \varphi \circ \gamma^\bullet_C.$$

Mit den für Familien, Produkte und mehrstellige Abbildungen eingeführten Notationen ist für jede Familie $(C; D) = (C_1, \ldots, C_n; D)$ von Hüllenstrukturen und jede mehrstellige Abbildung $f\colon C \to D$ die induzierte Abbildung $\overrightarrow{f} = \gamma^\bullet_D \circ f \circ (\gamma^\circ_{C_1}, \ldots, \gamma^\circ_{C_n})$ dasselbe wie

$$\overrightarrow{f} = \gamma^\bullet_D \circ f \circ \prod \gamma^\circ_C = \gamma^\bullet_D \circ f \circ \gamma^\circ_{\prod C}$$

für die einstellige Abbildung $f\colon \prod C \to D$. Für die Bildung von $\overrightarrow{f}$ ist es also gleichgültig, ob wir f als mehrstellige Abbildung $f\colon C \to D$ oder als einstellige Abbildung $f\colon \prod C \to D$ zwischen den Hüllenstrukturen $\prod C$ und D auffassen. Analoges gilt für $\overleftarrow{\varphi}$.

Definition 4.2.2 (Bindende, stetige und abgeschlossene Abbildungen)**.** Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Eine Abbildung $f\colon C \to D$ heißt

bindend,	falls	$\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f$	gilt;
stetig,	falls	$\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f$	gilt;
abgeschlossen,	falls	$\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f \circ \gamma_C$	gilt.

Jede bindende Abbildung $f\colon C \to D$ ist auch stetig, denn aus $f = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C$ folgt mit der Idempotenz von Hüllenoperationen

$$\gamma_D \circ f = \gamma_D \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C.$$

Analog ergibt sich, dass jede bindende Abbildung abgeschlossen ist. Für den Nachweis der Abgeschlossenheit einer beliebigen Funktion $f\colon C \to D$ genügt wegen der Extensivität der Hüllenoperation offensichtlich

$$\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq f \circ \gamma_C.$$

Wie für die Pfeil-Operatoren macht es auch für die Begriffe bindend, stetig und abgeschlossen keinen Unterschied, ob f als mehrstellige oder einstellige Abbildung angesehen wird, denn $f \circ \gamma_C = f \circ (\gamma_{C_1}, \ldots, \gamma_{C_n})$ ist für $f\colon C \to D$ identisch mit $f \circ \prod \gamma_C = f \circ \gamma_{\prod C}$ für $f\colon \prod C \to D$. Wir halten fest:

Lemma 4.2.3. *Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Eine mehrstellige Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann stetig (bzw. abgeschlossen, bindend), wenn sie als einstellige Abbildung $f\colon \prod C \to D$ stetig (bzw. abgeschlossen, bindend) ist.* □

Aus diesem Grund werden die meisten der folgenden Resultate zu den Grundbegriffen und Pfeil-Operatoren nur für einstellige Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen formuliert. Sie können mit Hilfe der Produkte von Hüllenstrukturen problemlos auf mehrstellige Abbildungen übertragen werden. Es sei allerdings bereits hier darauf hingewiesen, dass dies für den Begriff der σ-Vollstetigkeit im nächsten Kapitel nicht mehr möglich ist. Außerdem bedeutet Lemma 4.2.3 *nicht*, dass f die erwähnten Eigenschaften genau dann global zukommen, wenn sie in jeder Variablen gelten (ein Gegenbeispiel für die Abgeschlossenheit liefert später Beispiel 4.2.26).

Konvention 4.2.4 (Sprechweise für die Grundbegriffe)**.** Gehen die betrachteten Hüllenoperationen nur implizit aus dem Zusammenhang hervor, so verwenden wir für die Grundbegriffe die folgende, naheliegende Sprechweise, die wir an der Eigenschaft „bindend" illustrieren: Für eine Abbildung $f\colon P \to Q$ zwischen geordneten Mengen und Hüllenoperationen γ_P und γ_Q auf P bzw. Q sagen wir, f sei bindend *bezüglich* γ_P *und* γ_Q, falls $f\colon (P, \gamma_P) \to (Q, \gamma_Q)$ bindend ist.

Ebenso beziehen sich alle weiteren Notationen für $f\colon P \to Q$, die von Hüllenoperationen γ_P und γ_Q abhängen, auf die Abbildung $f\colon (P, \gamma_P) \to (Q, \gamma_Q)$, beispielsweise die induzierte Abbildung $\overrightarrow{f}$.

An der Definition 4.2.2 ist (zusammen mit Lemma 4.1.6) zu erkennen, dass eine Abbildung $f\colon C \to D$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\gamma_D^\circ \circ (\gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ) = f \circ \gamma_C^\circ$ gilt. Analog ist die Stetigkeit von f äquivalent zu $(\gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ) \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_D^\bullet \circ f$. Diese Beobachtung führt darauf, dass sich die drei Grundbegriffe bindend, stetig und abgeschlossen systematisch jeweils aus der Existenz einer Abbildung zwischen Hüllenbereichen und einem geeigneten kommutierenden Diagramm ergeben:

Theorem 4.2.5. *Seien C und D Hüllenstrukturen. Für jedes $f\colon C \to D$ gilt:*

$$\begin{aligned}
f \text{ bindend} \quad &\iff \quad (\exists \varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma)(\gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet = f), \\
f \text{ stetig} \quad &\iff \quad (\exists \varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma)(\varphi \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_D^\bullet \circ f), \\
f \text{ abgeschlossen} \quad &\iff \quad (\exists \varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma)(\gamma_D^\circ \circ \varphi = f \circ \gamma_C^\circ).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_C^{\bullet}"'] & D \\ C_\gamma \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & D_\gamma \arrow[u, "\gamma_D^{\circ}"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_C^{\bullet}"'] & D \arrow[d, "\gamma_D^{\bullet}"] \\ C_\gamma \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & D_\gamma \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] & D \\ C_\gamma \arrow[u, "\gamma_C^{\circ}"] \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & D_\gamma \arrow[u, "\gamma_D^{\circ}"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] & D \arrow[d, "\gamma_D^{\bullet}"] \\ C_\gamma \arrow[u, "\gamma_C^{\circ}"] \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & D_\gamma \end{tikzcd}$$

f bindend	f stetig	f abgeschlossen	f beliebig
$(f = \overleftarrow{\varphi})$	$(\varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\bullet} \circ f)$	$(\gamma_D^{\circ} \circ \varphi = f \circ \gamma_C^{\circ})$	$(\varphi = \overrightarrow{f})$

Abbildung 4.4: Kommutative Diagramme zu Theorem 4.2.5

In jedem der drei Fälle ist dann φ eindeutig bestimmt durch

$$\varphi = \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ} = \overrightarrow{f},$$

siehe auch die Darstellung in Abbildung 4.4.

Beweis. Zu „bindend“: Ist f bindend, so gilt $\gamma_D^{\circ} \circ \overrightarrow{f} \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\circ} \circ \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ} \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f$. Ist umgekehrt $f = \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet}$ für ein $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$, so folgt $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f$ wegen $\gamma_D \circ \gamma_D^{\circ} = \gamma_D^{\circ}$ und $\gamma_C^{\bullet} \circ \gamma_C = \gamma_C^{\bullet}$.

Zu „stetig“: Mit der Stetigkeit von f ergibt sich $\overrightarrow{f} \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ} \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\bullet} \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \gamma_D^{\bullet} \circ \gamma_D \circ f = \gamma_D^{\bullet} \circ f$. Gilt umgekehrt $\varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\bullet} \circ f$ für ein $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$, so ist

$$\begin{aligned} \gamma_D \circ f \circ \gamma_C &= \gamma_D^{\circ} \circ \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C = \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} \circ \gamma_C = \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\circ} \circ \gamma_D^{\bullet} \circ f \\ &= \gamma_D \circ f. \end{aligned}$$

Zu „abgeschlossen“: Aus der Abgeschlossenheit von f folgt $\gamma_D^{\circ} \circ \overrightarrow{f} = \gamma_D^{\circ} \circ \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ} = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \circ \gamma_C^{\circ} = f \circ \gamma_C \circ \gamma_C^{\circ} = f \circ \gamma_C^{\circ}$. Umgekehrt ergibt sich aus $\gamma_D^{\circ} \circ \varphi = f \circ \gamma_C^{\circ}$ für ein $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$

$$\begin{aligned} \gamma_D \circ f \circ \gamma_C &= \gamma_D \circ f \circ \gamma_C^{\circ} \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D \circ \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = f \circ \gamma_C^{\circ} \circ \gamma_C^{\bullet} \\ &= f \circ \gamma_C. \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit: Die Gleichung $\varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\bullet} \circ f$ impliziert $\varphi = \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} \circ \gamma_C^{\circ} = \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ} = \overrightarrow{f}$, und auch die Gleichung $\gamma_D^{\circ} \circ \varphi = f \circ \gamma_C^{\circ}$ liefert $\varphi = \gamma_D^{\bullet} \circ \gamma_D^{\circ} \circ \varphi = \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ} = \overrightarrow{f}$. Aus $\gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = f$ folgt schließlich $\varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\bullet} \circ \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_D^{\bullet} \circ f$ (und $\gamma_D^{\circ} \circ \varphi = \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} \circ \gamma_C^{\circ} = f \circ \gamma_C^{\circ}$), also auch in diesem Fall $\varphi = \overrightarrow{f}$. □

Das nächste Beispiel motiviert die Namensgebung für *stetig* und *abgeschlossen*, indem es zeigt, wie die Stetigkeit und die Abgeschlossenheit für Funktionen zwischen Hüllenstrukturen mit den gleichnamigen Begriffen aus der Topologie zusammenhängen.

Beispiel 4.2.6. Für einen topologischen Raum $X = (|X|, \mathcal{T})$ bezeichne $\overline{A}$ den Abschluss von $A \subseteq X$, und Γ_X sei der zugehörige (Kuratowskische) Hüllenoperator auf X, d. h. $\Gamma_X(A) = \overline{A}$.

Eine Abbildung $\alpha\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist bekanntlich genau dann im topologischen Sinne *stetig*, wenn $\alpha[\overline{A}] \subseteq \overline{\alpha[A]}$ für alle $A \subseteq X$ gilt. Mit dem direkten Bild

$\alpha_\to \colon \mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}Y$, $\alpha_\to(A) = \alpha[A]$, den Hüllenoperatoren von X und Y sowie der durch die Mengeninklusion induzierten Ordnung $\leq$ von Abbildungen zwischen Potenzmengen lässt sich die Stetigkeit von α demnach formulieren als $\alpha_\to \circ \Gamma_X \leq \Gamma_Y \circ \alpha_\to$. Man sieht leicht, dass hierzu die folgende Bedingung äquivalent ist:

$$\Gamma_Y \circ \alpha_\to \circ \Gamma_X = \Gamma_Y \circ \alpha_\to.$$

Dies ist aber nichts anderes als die *Stetigkeit* von $\alpha_\to$ bezüglich der (klassischen) Hüllenstrukturen $(\mathfrak{P}X, \Gamma_X)$ und $(\mathfrak{P}Y, \Gamma_Y)$.

Das direkte Bild $\alpha_\to \colon (\mathfrak{P}X, \Gamma_X) \to (\mathfrak{P}Y, \Gamma_Y)$ ist bezüglich der Hüllenstrukturen *abgeschlossen*, falls

$$\Gamma_Y \circ \alpha_\to \circ \Gamma_X = \alpha_\to \circ \Gamma_X$$

gilt (äquivalent hierzu ist $\Gamma_Y \circ \alpha_\to \leq \alpha_\to \circ \Gamma_X$). Das ist gleichbedeutend mit $\overline{\alpha[\overline{A}]} = \alpha[\overline{A}]$ für alle $A \subseteq X$, d. h. die Funktion $\alpha \colon X \to Y$ bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab, was gerade der *Abgeschlossenheit* von α im Sinne der Topologie entspricht.

Dies alles gilt allgemeiner auch für Abbildungen zwischen beliebigen Hüllenräumen und wird in Kapitel 6 weiter entwickelt.

Die Bezeichnung *bindend* ist motiviert durch den Zusammenhang mit sogenannten *Bindungen* aus der Formalen Begriffsanalyse, siehe [44]. Auch dies wird in Kapitel 6, insbesondere im Korollar 6.2.41, näher ausgeführt.

Eine wichtige Rolle spielt die Eigenschaft *bindend* für bijektive Korrespondenzen von gewünschten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen mit geeigneten Abbildungen zwischen gegebenen Hüllenstrukturen vermöge der Operatoren $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ und $f \mapsto \overrightarrow{f}$.

Proposition 4.2.7. *Für alle Abbildungen $f, g \colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen und alle $\varphi, \psi \colon C_\gamma \to D_\gamma$ zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen gilt:*

(a) $\overset{\leftrightarrows}{f} = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C$, *insbesondere also*

$$\overset{\leftrightarrows}{f} = f \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ bindend.}$$

(b) $\overset{\rightleftarrows}{\varphi} = \varphi$, *folglich ist* $\overleftarrow{\varphi}$ *stets bindend.*

(c) $f \leq g \Rightarrow \overrightarrow{f} \leq \overrightarrow{g}$.

(d) $\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \overleftarrow{\varphi} \leq \overleftarrow{\psi}$.

Beweis. Es ist $\overset{\leftrightarrows}{f} = \gamma_D^\circ \circ \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C$ und $\overset{\rightleftarrows}{\varphi} = \gamma_D^\bullet \circ \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet \circ \gamma_C^\circ = \varphi$. Die Aussagen in (c) und (d) gelten, da $\gamma_D^\bullet$ und γ_D° isoton sind. □

Die bindenden Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen reichen somit aus, um alle Abbildungen zwischen Hüllenbereichen kanonisch zu induzieren:

Theorem 4.2.8. *Seien C, D Hüllenstrukturen. Die punktweise geordneten Mengen*

- *aller bindenden Abbildungen von C in D und*
- *aller Abbildungen von C_γ in D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Isomorphismen $f \mapsto \overrightarrow{f}$ *und* $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$*.*

Beweis. Mit Proposition 4.2.7. $\square$

Die Pfeil-Operatoren verhalten sich beide gutartig in Bezug auf die Komposition, im Fall von $f \mapsto \overrightarrow{f}$ gilt dies für stetige oder abgeschlossene und im Fall von $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ sogar für beliebige Abbildungen. Allerdings erhält nur der erste Pfeil-Operator auch die identische Abbildung.

Lemma 4.2.9. *Seien* C*,* D*,* E *Hüllenstrukturen,* $f\colon C \to D$*,* $g\colon D \to E$ *Abbildungen und* g *stetig (bzw.* f *abgeschlossen). Dann gilt*

$$\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \quad \textit{und} \quad \overrightarrow{\mathrm{id}_C} = \overrightarrow{\gamma_C} = \mathrm{id}_{C_\gamma}.$$

Beweis. Ist g stetig oder f abgeschlossen, so ergibt sich die erste Behauptung wie folgt:

$$\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \gamma_E^\bullet \circ g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C^\circ = \gamma_E^\bullet \circ g \circ f \circ \gamma_C^\circ = \overrightarrow{g \circ f}.$$

Die zweite gilt wegen $\gamma_C^\bullet \circ \gamma_C^\circ = \gamma_C^\bullet \circ \gamma_C \circ \gamma_C^\circ = \mathrm{id}_{C_\gamma}$. $\square$

Lemma 4.2.10. *Seien* C*,* D*,* E *Hüllenstrukturen. Für beliebige Abbildungen* $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ *und* $\psi\colon D_\gamma \to E_\gamma$ *zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen gilt*

$$\overleftarrow{\psi \circ \varphi} = \overleftarrow{\psi} \circ \overleftarrow{\varphi} \quad \textit{und} \quad \overleftarrow{\mathrm{id}_{C_\gamma}} = \gamma_C \geq \mathrm{id}_C.$$

Beweis. Man berechnet

$$\overleftarrow{\psi \circ \varphi} = \gamma_E^\circ \circ \psi \circ \mathrm{id}_{D_\gamma} \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_E^\circ \circ \psi \circ \gamma_D^\bullet \circ \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet = \overleftarrow{\psi} \circ \overleftarrow{\varphi}$$

und $\mathrm{id}_C \leq \gamma_C = \gamma_C^\circ \circ \mathrm{id}_{C_\gamma} \circ \gamma_C^\bullet = \overleftarrow{\mathrm{id}_{C_\gamma}}$. $\square$

Zu den Pfeil-Operatoren zeigen wir noch, wie sie sich für mehrstellige Abbildungen in jeder Variablen auf den einstelligen Fall zurückführen lassen.

Lemma 4.2.11. *Sei* $(C; D)$ *eine Familie von Hüllenstrukturen und* $f\colon C \to D$*. Für alle* $i \in \underline{n}$ *und alle* $c \in \prod C_\gamma$ *ist*

$$(\overrightarrow{f})_i^c = \overrightarrow{f_i^c}.$$

Beweis. Sei $i \in \underline{n}$ und $c \in \prod C_\gamma$. Dann gilt für alle $d \in (C_i)_\gamma$

$$(\overrightarrow{f})_i^c(d) = \overrightarrow{f}(c[i \mapsto d]) = \gamma_D(f(c[i \mapsto d])) = \gamma_D(f_i^c(d)) = \overrightarrow{f_i^c}(d). \qquad \square$$

Lemma 4.2.12. *Sei* $(C; D)$ *eine Familie von Hüllenstrukturen und* $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$*. Für alle* $i \in \underline{n}$ *und alle* $a \in \prod C$ *ist*

$$(\overleftarrow{\varphi})_i^a = \overleftarrow{\varphi_i^{(\prod \gamma_C)(a)}}.$$

Beweis. Sei $i \in \underline{n}$ und $a \in \prod C$. Für alle $x \in C_i$ gilt

$$\begin{aligned}(\overleftarrow{\varphi})_i^a(x) &= \varphi((\textstyle\prod \gamma_C)(a[i \mapsto x])) = \varphi(\gamma_{C_1}(a_1), \dots, \gamma_{C_i}(x), \dots, \gamma_{C_n}(a_n)) \\ &= \varphi_i^{(\prod \gamma_C)(a)}(\gamma_{C_i}(x)) = \overleftarrow{\varphi_i^{(\prod \gamma_C)(a)}}(x).\end{aligned} \qquad \square$$

4.2.2 Erste Zusammenhänge der Grundbegriffe

Wir setzen nun die Untersuchung der Grundbegriffe stetig, abgeschlossen und bindend fort und sind neben ihrer weiteren Charakterisierung vor allem an ihren Zusammenhängen untereinander interessiert. Für beide Zwecke ist es günstig, sukzessive weitere Grundbegriffe einzuführen. Den Anfang machen die Eigenschaften *innenbindend* und *außenbindend*, die eine Verschärfung der Stetigkeit bzw. der Abgeschlossenheit darstellen.

Definition 4.2.13 (Innenbindende und außenbindende Abbildungen)**.** Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Eine Abbildung $f\colon C \to D$ heißt

$$\begin{aligned} &\textit{innenbindend}, \quad \text{falls} \quad f \circ \gamma_C = f \quad \text{gilt,} \\ &\textit{außenbindend}, \quad \text{falls} \quad \gamma_D \circ f = f \quad \text{gilt.} \end{aligned}$$

Auch für diese beiden Grundbegriffe ergibt sich sofort:

Lemma 4.2.14. *Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Eine mehrstellige Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann innenbindend (bzw. außenbindend), wenn sie als einstellige Abbildung $f\colon \prod C \to D$ innenbindend (bzw. außenbindend) ist.* □

Wir werden gleich sehen, dass eine Abbildung zwischen Hüllenstrukturen genau dann bindend ist, wenn sie sowohl innen- als auch außenbindend ist. Zuvor betrachten wir außenbindende Abbildungen etwas näher. Offensichtlich ist, dass jedes $f\colon C \to D$ mit $\gamma_D \circ f \leq f$ bereits außenbindend ist. Außerdem sieht man unmittelbar:

Lemma 4.2.15. *Für jede Abbildung $f\colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen gilt*

$$\begin{aligned} f \text{ abgeschlossen} \quad &\iff \quad f[C_\gamma] \subseteq D_\gamma, \\ f \text{ außenbindend} \quad &\iff \quad f[C] \subseteq D_\gamma. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft, außenbindend zu sein, ist also nur eine Eigenschaft des Bildes von f. □

Außenbindende Hüllenoperationen lassen sich wie folgt charakterisieren:

Korollar 4.2.16. *Sei C eine Hüllenstruktur und $\eta\colon C \to C$ eine Hüllenoperation. Dann gilt:*

$$\gamma_C \leq \eta \quad \iff \quad \eta \text{ außenbindend.}$$

Beweis. $\gamma_C \leq \eta$ ist nach Proposition 1.2.27 äquivalent zu $\eta[C] \subseteq C_\gamma$. □

Als nächstes formulieren wir ein hinreichendes Kriterium für außenbindende Abbildungen, welches sich später als sehr nützlich erweisen wird.

Lemma 4.2.17. *Seien C, D Hüllenstrukturen, $f\colon C \to D$ eine Abbildung und $A \subseteq C$. Ist $f[A]$ $\bigwedge$-dicht in D und $f[A] \subseteq D_\gamma$, so folgt bereits $f[C] \subseteq D_\gamma$, d. h. f ist außenbindend.*

Beweis. Sei $f[A] \subseteq D_\gamma$ $\bigwedge$-dicht in D und $x \in C$. Dann gilt für alle $a \in A$

$$f(x) \leq f(a) \quad \implies \quad \gamma_D(f(x)) \leq \gamma_D(f(a)) = f(a),$$

nach Voraussetzung also $\gamma_D(f(x)) \leq f(x)$. Somit ist f außenbindend. □

In der folgenden Proposition fassen wir die Implikationen der bisher eingeführten Grundbegriffe zusammen und zeigen außerdem, wie sich die Eigenschaft bindend in zwei geeignete Eigenschaften aufspalten lässt.

Proposition 4.2.18. *Sei $f\colon C \to D$ eine Abbildung zwischen Hüllenstrukturen. Es gilt*

$$\begin{aligned} &f \text{ bindend} &&\Longrightarrow && f \text{ innenbindend} &&\Longrightarrow && f \text{ stetig},\\ &f \text{ bindend} &&\Longrightarrow && f \text{ außenbindend} &&\Longrightarrow && f \text{ abgeschlossen}. \end{aligned}$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist bindend.

(2) f ist innen- und außenbindend.

(3) f ist stetig und außenbindend.

(4) f ist abgeschlossen und innenbindend.

Beweis. Ist f bindend, so folgt $f \circ \gamma_C = (\gamma_D \circ f \circ \gamma_C) \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f$, also ist f innenbindend; analog ergibt sich, dass f außenbindend ist.

Ist f stetig und außenbindend, so folgt $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f = f$; analog erhält man $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f$, falls f abgeschlossen und innenbindend ist.

Alle übrigen Implikationen sind damit klar. □

Lemma 4.2.19. *Für jede Hüllenstruktur C ist die Identität id_C stetig und abgeschlossen, und die Hüllenoperation γ_C ist bindend.*

Beweis. Es ist $\gamma_C \circ \mathrm{id}_C \circ \gamma_C = \gamma_C \circ \gamma_C = \gamma_C = \gamma_C \circ \mathrm{id}_C$ und analog $\gamma_C \circ \mathrm{id}_C \circ \gamma_C = \mathrm{id}_C \circ \gamma_C$, außerdem gilt $\gamma_C \circ \gamma_C \circ \gamma_C = \gamma_C$. □

Beispiel 4.2.20. Eine stetige und abgeschlossene Abbildung muss *nicht* bindend sein: Ist C eine Hüllenstruktur, deren Hüllenoperation nicht die Identität ist, so ist nach Lemma 4.2.19 zwar $\mathrm{id}_C\colon C \to C$ stetig und abgeschlossen, aber wegen $\gamma_C \circ \mathrm{id}_C \circ \gamma_C = \gamma_C \neq \mathrm{id}_C$ nicht bindend.

Zugleich stetige und abgeschlossene Abbildungen sind zuweilen nützlich und können wie folgt charakterisiert werden:

Lemma 4.2.21. *Sei $f\colon C \to D$ eine Abbildung zwischen Hüllenstrukturen. Es gilt:*

$$f \text{ stetig und abgeschlossen} \quad\Longleftrightarrow\quad \gamma_D \circ f = f \circ \gamma_C.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung ist $\gamma_D \circ f = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f \circ \gamma_C$.

„$\Leftarrow$“: Aus $\gamma_D \circ f = f \circ \gamma_C$ folgt $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f \circ \gamma_C \circ \gamma_C = f \circ \gamma_C$, also die Stetigkeit von f. Analog erhält man die Abgeschlossenheit. □

Beispiel 4.2.22. Für jede Familie $C = (\,C_i : i \in I\,)$ von Hüllenstrukturen und jedes $j \in I$ ist die j-te Projektionsabbildung $\pi_j\colon \prod C \to C_j$ stetig und abgeschlossen, denn es gilt $\gamma_{D_i} \circ \pi_j = \pi_j \circ \prod \gamma_D$.

Als nächstes betrachten wir, wie sich die bisher betrachteten Eigenschaften unter der Komposition verhalten.

Proposition 4.2.23. *Seien C, D, E Hüllenstrukturen und $f\colon C \to D$, $g\colon D \to E$ Abbildungen. Es gilt:*

(a)	f *stetig*	*und*	g *stetig*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *stetig,*
(b)	f *stetig*	*und*	g *innenbindend*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *innenbindend,*
(c)	f *stetig*	*und*	g *bindend*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *bindend,*
(d)	f *innenbindend*			$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *innenbindend,*
(e)	f *abgeschlossen*	*und*	g *abgeschlossen*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *abgeschlossen,*
(f)	f *außenbindend*	*und*	g *abgeschlossen*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *außenbindend,*
(g)	f *bindend*	*und*	g *abgeschlossen*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *bindend,*
(h)			g *außenbindend*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *außenbindend,*
(i)	f *innenbindend*	*und*	g *außenbindend*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *bindend,*
(j)	f *bindend*	*und*	g *bindend*	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ *bindend.*

Beweis. Zu (a). $\gamma_E \circ g \circ f \circ \gamma_C = \gamma_E \circ g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \gamma_E \circ g \circ \gamma_D \circ f = \gamma_E \circ g \circ f$. Zu (b). $g \circ f \circ \gamma_C = g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = g \circ \gamma_D \circ f = g \circ f$. Zu (c). $\gamma_E \circ g \circ f \circ \gamma_C = g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = g \circ \gamma_D \circ f = g \circ f$. Zu (d). $g \circ f \circ \gamma_C = g \circ f$. (e)–(h) ergeben sich analog zu (a)–(d). Zu (i). $\gamma_E \circ g \circ f \circ \gamma_C = g \circ f \circ \gamma_C = g \circ f$. (j) folgt schließlich aus (i). □

Die Grundbegriffe für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen können auch auf die *Elemente* einer Hüllenstruktur C übertragen werden, indem Elemente $x \in C$ mit Abbildungen $x\colon \mathbf{1} \to C$ identifiziert werden. Wegen $\gamma_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_1$ und $\mathbf{1}_\gamma = \mathbf{1} = (1, \leq)$ lässt sich dann die induzierte Abbildung $\overrightarrow{x} = \gamma_C^\bullet \circ x \circ \gamma_{\mathbf{1}}^\circ$ von $\mathbf{1}_\gamma$ in C_γ mit dem Abschluss $\gamma_C(x)$ identifizieren. Für ein Element $c\colon \mathbf{1}_\gamma \to C_\gamma$ des Hüllenbereichs von C ist umgekehrt $\overleftarrow{c} = \gamma_C^\circ \circ c \circ \circ \gamma_{\mathbf{1}}^\bullet$ eine Abbildung von $\mathbf{1}$ in C, entspricht also wieder dem Element c.

Das folgende Lemma zeigt, dass diese Identifizierung keine Konflikte mit früheren Definitionen verursacht, da die abgeschlossenen Abbildungen $\mathbf{1} \to C$ gerade die abgeschlossenen Elemente bezüglich der Hüllenoperation γ_C sind.

Lemma 4.2.24. *Sei C eine Hüllenstruktur.*

(a) Ein Element $x \in C$ ist genau dann als Abbildung $x\colon \mathbf{1} \to C$ abgeschlossen (bzw. außenbindend bzw. bindend), wenn x als Element bezüglich γ_C abgeschlossen, also $x \in C_\gamma$ ist.

(b) Jedes Element $\mathbf{1} \to C$ ist innenbindend, also auch stetig.

Beweis. Für $x\colon \mathbf{1} \to C$ sind die Aussagen $\gamma_C \circ x \circ \gamma_{\mathbf{1}} = x \circ \gamma_{\mathbf{1}}$ und $\gamma_C \circ x = x$ offensichtlich äquivalent, und letztere bedeutet dasselbe wie $\gamma_C(x) = x$. Wegen $\gamma_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_1$ sind in diesem Fall außerdem die Eigenschaften abgeschlossen, außenbindend und bindend identisch. Schließlich gilt stets $x \circ \gamma_{\mathbf{1}} = x$, d. h. x ist innenbindend. □

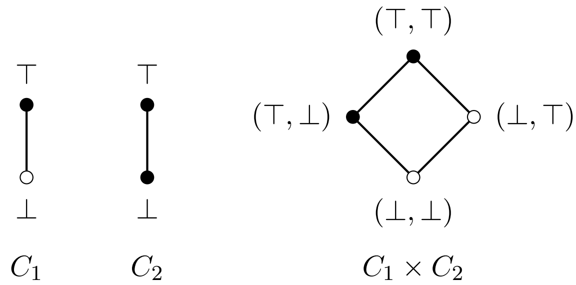

Abbildung 4.5: Gegenbeispiel zur Abgeschlossenheit

Nach den nullstelligen untersuchen wir jetzt beliebige mehrstellige Funktionen und prüfen, wie sich die Grundbegriffe als Eigenschaften in den einzelnen Variablen verhalten. Wir beginnen mit der Abgeschlossenheit.

Lemma 4.2.25. *Es sei $(C; D) = (C_1, \dots, C_n; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen, und $f \colon C \to D$ sei eine n-stellige Abbildung. Ist f in mindestens einer Koordinate abgeschlossen, so ist f schon abgeschlossen.*

Beweis. Sei $f \colon C \to D$ in der i-ten Variablen abgeschlossen (für $i \in \underline{n}$). Dann gilt

$$(\gamma_D \circ f \circ \gamma_C)(x) = (\gamma_D \circ f_i^{(\prod \gamma_C)(x)} \circ \gamma_{C_i})(x_i) = (f_i^{(\prod \gamma_C)(x)} \circ \gamma_{C_i})(x_i) = (f \circ \gamma_C)(x)$$

für alle $x \in \prod C$. □

Die Umkehrung der obigen Aussage gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.2.26. Betrachte die Hüllenstrukturen C_1, C_2 und ihr Produkt in Abbildung 4.5. Die Projektionsabbildung $\pi_1 \colon C_1 \times C_2 \to C_1$ ist offensichtlich abgeschlossen, aber wegen

$$\gamma_{C_1}(\pi_1(\bot, \gamma_{C_2}(\top))) = \gamma_{C_1}(\bot) = \top \neq \bot = \pi_1(\bot, \gamma_{C_2}(\top))$$

ist $\pi_1 \colon (C_1, C_2) \to C_1$ nicht in der zweiten Variablen abgeschlossen.

Das nächste Lemma zur Eigenschaft außenbindend ist naheliegend, da sie nur eine Eigenschaft des Bildes ist (siehe Lemma 4.2.15).

Lemma 4.2.27. *Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Für jedes $f \colon C \to D$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist außenbindend.

(2) f ist in mindestens einer Koordinate außenbindend.

(3) f ist in allen Koordinaten außenbindend.

Beweis. Ist $f \colon C \to D$ für ein $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen außenbindend, d. h. $\gamma_D \circ f_i^a = f_i^a$ für alle $a \in \prod C$, so gilt bereits $\gamma_D \circ f = f$.

Aus letzterem folgt umgekehrt offensichtlich $\gamma_D \circ f_i^a = f_i^a$ für alle $a \in \prod C$ und für alle $i \in \underline{n}$. □

Wie für die Isotonie (vergleiche Proposition 2.1.6) ergibt sich auch für die Stetigkeit und ebenso für die Eigenschaften innenbindend und bindend, dass sie genau dann in jeder Variablen gelten, wenn sie global gelten:

Theorem 4.2.28. *Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Eine n-stellige Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann stetig (bzw. innenbindend, bindend), wenn sie in jeder Variablen stetig (bzw. innenbindend, bindend) ist.*

Beweis. Ist f stetig (bzw. innenbindend), so ist wegen der Stetigkeit von $(\mathrm{id}_C)_i^a$ und Proposition 4.2.23 auch $f_i^a = f \circ (\mathrm{id}_C)_i^a$ für alle $a \in \prod C$ und alle $i \in \underline{n}$ stetig (bzw. innenbindend).

Die Umkehrung ergibt sich mit vollständiger Induktion über die Stellenzahl n (und der Beweis für die Eigenschaft „innenbindend" verläuft analog): Für $n = 0$ und $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei f eine $(n+1)$-stellige Abbildung von $C = (C_1, \ldots, C_n, C_{n+1})$ in D, die in jeder Variablen stetig ist, und sei $y \in C_{n+1}$. Dann ist die n-stellige Funktion $g\colon (C_1, \ldots, C_n) \to D$, definiert durch $g(x) = f(x; y)$, in jeder Variablen stetig, und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
(\gamma_D \circ f \circ \gamma_C)(x; y) &= \gamma_D(f(\gamma_{C_1}(x_1), \ldots, \gamma_{C_n}(x_n); \gamma_{C_{n+1}}(y))) \\
&= \gamma_D(f(\gamma_{C_1}(x_1), \ldots, \gamma_{C_n}(x_n); y)) \\
&= \gamma_D(g(\gamma_{C_1}(x_1), \ldots, \gamma_{C_n}(x_n))) \\
&= \gamma_D(g(x_1, \ldots, x_n)) = (\gamma_D \circ f)(x; y)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \prod_{i=1}^n C_i$. Somit ist f stetig.

Für die Eigenschaft „bindend" erhält man die Behauptung nun aus dem bisher gezeigten zusammen mit Lemma 4.2.27, da eine Abbildung genau dann bindend ist, wenn sie stetig und außenbindend ist. □

Zum Abschluss dieses ersten Überblicks über die Grundbegriffe zeigen wir, wie sie sich im Zusammenhang mit punktweisen Suprema bzw. Infima verhalten:

Proposition 4.2.29. *Es seien C, D Hüllenstrukturen, und D sei vollständig.*

(a) Das punktweise Supremum stetiger (bzw. innenbindender) Abbildungen von C in D ist wieder stetig (bzw. innenbindend).

(b) Das punktweise Infimum abgeschlossener (bzw. außenbindender, innenbindender, bindender) Abbildungen von C in D ist wieder abgeschlossen (bzw. außenbindend, innenbindend, bindend).

Beweis. Zu (a). Für jede Menge $\mathcal{F}$ stetiger Abbildungen von C in D und jedes $x \in C$ erhält man mit zweimaliger Anwendung von Lemma 4.1.10

$$\begin{aligned}
(\gamma_D \circ \bigvee \mathcal{F} \circ \gamma_C)(x) &= \gamma_D(\textstyle\bigvee_D\{\, (f \circ \gamma_C)(x) : f \in \mathcal{F}\,\}) \\
&= \gamma_D(\textstyle\bigvee_D\{\, (\gamma_D \circ f \circ \gamma_C)(x) : f \in \mathcal{F}\,\}) \\
&= \gamma_D(\textstyle\bigvee_D\{\, (\gamma_D \circ f)(x) : f \in \mathcal{F}\,\}) \\
&= \gamma_D(\textstyle\bigvee_D\{\, f(x) : f \in \mathcal{F}\,\}) \\
&= (\gamma_D \circ \bigvee \mathcal{F})(x).
\end{aligned}$$

Auch die Behauptung für innenbindende Abbildungen prüft man leicht nach.

Zu (b). Sei $\mathcal{F}$ eine Menge abgeschlossener Abbildungen von C in D. Dann ist für jedes $x \in C$

$$\begin{aligned}(\gamma_D \circ \bigwedge \mathcal{F} \circ \gamma_C)(x) &= \gamma_D(\bigwedge_D \{\, (f \circ \gamma_C)(x) : f \in \mathcal{F} \,\}) \\ &= \gamma_D(\bigwedge_D \{\, (\gamma_D \circ f \circ \gamma_C)(x) : f \in \mathcal{F} \,\}) \\ &= \bigwedge_D \{\, (\gamma_D \circ f \circ \gamma_C)(x) : f \in \mathcal{F} \,\} \\ &= \bigwedge_D \{\, (f \circ \gamma_C)(x) : f \in \mathcal{F} \,\} \\ &= (\bigwedge \mathcal{F} \circ \gamma_C)(x).\end{aligned}$$

Die übrigen Behauptungen ergeben sich ganz ähnlich. □

4.3 Isotone und antitone Abbildungen

Setzt man nicht beliebige, sondern isotone bzw. antitone Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen voraus, so ergeben sich einige weitere interessante Charakterisierungen der bisher betrachteten Grundbegriffe. Bevor wir diese näher ausführen, befassen wir uns mit den Pfeil-Operatoren im Zusammenhang mit $(\sigma;\tau)$-monotonen Abbildungen.

4.3.1 Monotonie-Eigenschaften der Pfeil-Operatoren

Die Pfeil-Operatoren bewahren $(\sigma;\tau)$-Monotonie:

Lemma 4.3.1. *Sei $(C;D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen und $(\sigma;\tau)$ eine Signatur.*

(a) Mit $f\colon C \to D$ ist auch $\overrightarrow{f}\colon C_\gamma \to D_\gamma$ eine $(\sigma;\tau)$-monotone Abbildung.

(b) Mit $\varphi\colon C_\gamma \to C_\gamma$ ist auch $\overleftarrow{\varphi}\colon C \to D$ eine $(\sigma;\tau)$-monotone Abbildung.

Beweis. Dies folgt wegen $\overrightarrow{f} = \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ$ und $\overleftarrow{\varphi} = \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet$ aus der Isotonie von $\gamma_{C_i}^\bullet$, $\gamma_{C_i}^\circ$ $(i \in \underline{n})$ und $\gamma_D^\bullet$, γ_D°. □

Korollar 4.3.2. *Sei $(C;D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen und $(\sigma;\tau)$ eine Signatur. Die punktweise geordneten Mengen*

- *aller bindenden, $(\sigma;\tau)$-monotonen Abbildungen von C in D und*
- *aller $(\sigma;\tau)$-monotonen Abbildungen von C_γ in D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Isomorphismen $f \mapsto \overrightarrow{f}$ und $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$.

Beweis. Nach Theorem 4.2.8 und Lemma 4.3.1. □

Bemerkung 4.3.3. Für *isotone* Abbildungen $f\colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen gilt

$$f \le f \circ \gamma_C \le \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \overset{\leftrightarrows}{f},$$

woraus zusammen mit Proposition 4.2.7 folgt, dass $f \mapsto \overset{\leftrightarrows}{f}$ eine Hüllenoperation auf der punktweise geordneten Menge aller isotonen Abbildungen von C in D ist. Auf diese Weise erhält man zu jeder isotonen Abbildung f eine kleinste darüber liegende bindende und isotone Abbildung.

Ein weiterer Aspekt der Pfeil-Operatoren ergibt sich bereits aus den Ergebnissen des vorigen Abschnitts. Wir haben gesehen, dass die Pfeil-Operatoren selbst isoton sind und unter geeigneten Umständen die Komposition und zum Teil auch identische Abbildungen bewahren. Darüber hinaus wissen wir jetzt, dass sie ebenso Isotonie und Antitonie erhalten. Viele Eigenschaften von – oft isotonen oder antitonen – Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen können außerdem elementfrei mit Hilfe von Gleichungen oder Ungleichungen ausgedrückt werden. Von einem zentralen Beispiel hierfür machen wir fortwährend Gebrauch: Eine isotone Selbstabbildung f einer geordneten Menge ist eine Hüllenoperation, falls sie die Ungleichungen $\mathrm{id} \leq f$ und $f \circ f \leq f$ erfüllt. Auch haben wir beispielsweise ordnungstheoretische Adjunktionen (f, g) für isotone Abbildungen f und g elementfrei durch Ungleichungen in $\circ$ und id beschrieben. Im folgenden formulieren wir nun informell ein für solche Situationen nützliches Prinzip für geeignete Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen, welches besagt, dass alle erfüllten Ungleichungen (und Gleichungen) in $\circ$ und id beim Übergang $f \mapsto \overrightarrow{f}$ zu den Hüllenbereichen auch für die induzierten Abbildungen erhalten bleiben. Im Falle von Ungleichungen in $\circ$ gilt hiervon auch die Umkehrung für $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$.

Proposition 4.3.4. *(a) Es seien $f_1, \ldots, f_n$ Funktionen zwischen Hüllenstrukturen, die alle bindend (bzw. alle stetig bzw. alle abgeschlossen) sind. Erfüllen $f_1, \ldots, f_n$ eine Ungleichung in $\circ$ und* id *bzgl. der gegebenen Hüllenstrukturen, so erfüllen die induzierten Abbildungen $\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}$ diese Ungleichung bzgl. der zugehörigen Hüllenbereiche. Dies gilt damit insbesondere für Gleichungen, und die Voraussetzung kann in geeigneten Fällen auf Mischungen von stetigen und von abgeschlossenen Abbildungen abgeschwächt werden.*

Ist beispielsweise $f\colon C \to C$ eine Hüllenoperation und bindend (es reicht bereits stetig oder abgeschlossen), so ist auch $\overrightarrow{f}\colon C_\gamma \to C_\gamma$ eine Hüllenoperation, denn mit f ist auch $\overrightarrow{f}$ isoton und die benötigten Ungleichungen übertragen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_C \leq f \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{id}_{C_\gamma} = \overrightarrow{\mathrm{id}_C} \leq \overrightarrow{f}, \\ f \circ f \leq f \quad &\Longrightarrow \quad \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f \circ f} \leq \overrightarrow{f}. \end{aligned}$$

(b) Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ beliebige Abbildungen zwischen Hüllenbereichen, die eine Ungleichung in $\circ$ bzgl. der gegebenen Hüllenbereiche erfüllen, so erfüllen die induzierten Abbildungen $\overleftarrow{\varphi_1}, \ldots, \overleftarrow{\varphi_n}$ diese Ungleichung bzgl. der zugehörigen Hüllenstrukturen. Dies kann in gewissen Fällen auf Ungleichungen mit id *ausgedehnt werden.*

Ist etwa $\varphi\colon C_\gamma \to C_\gamma$ eine Hüllenoperation, so auch $\overleftarrow{\varphi}\colon C \to C$, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{C_\gamma} \leq \varphi \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{id}_C \leq \overleftarrow{\mathrm{id}_{C_\gamma}} \leq \overleftarrow{\varphi}, \\ \varphi \circ \varphi \leq \varphi \quad &\Longrightarrow \quad \overleftarrow{\varphi} \circ \overleftarrow{\varphi} = \overleftarrow{\varphi \circ \varphi} \leq \overleftarrow{\varphi}. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Proposition 4.2.7 sowie Lemma 4.2.9 und Lemma 4.2.10. □

Als Anwendung ergibt sich sofort, dass die bindenden Hüllenoperationen auf einer gegebenen Hüllenstruktur gerade hinreichen, um alle Hüllenoperationen auf dem Hüllenbereich zu induzieren:

Korollar 4.3.5. *Sei C eine Hüllenstruktur. Die punktweise geordneten Mengen*

- *aller bindenden Hüllenoperationen auf C und*

- *aller Hüllenoperationen auf C_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Isomorphismen $f \mapsto \overrightarrow{f}$ und $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$. $\square$

Das wird am Beispiel von Schnitt- und Abschnittsoperator illustriert.

Beispiel 4.3.6. Sei P eine quasigeordnete Menge. Der Schnittoperator Δ_P und der Abschnittsoperator $\downarrow_P$ (siehe Definition 1.2.2) sind Hüllenoperatoren auf $|P|$, d. h. Hüllenoperationen auf dem Potenzmengenverband $\mathfrak{P}|P|$. Es gilt

$$\Delta_P \circ \downarrow_P = \Delta_P = \downarrow_P \circ \Delta_P,$$

mit anderen Worten: Δ_P ist bindend bezüglich $\downarrow_P$. Der Hüllenbereich von $\downarrow_P$ ist der Abschnittsverband $\mathfrak{A}P$, und nach Korollar 4.3.5 ist somit

$$\overrightarrow{\Delta_P} = \downarrow_P^\bullet \circ \Delta_P \circ \downarrow_P^\circ$$

eine Hüllenoperation auf dem Hüllenbereich $\mathfrak{A}P = (\mathfrak{P}|P|, \downarrow_P)_\gamma$. Dieses $\overrightarrow{\Delta_P}$ ist gerade der restringierte Schnittoperator $\Delta_P^\downarrow$. Umgekehrt erhält man Δ_P aus $\Delta_P^\downarrow$ einfach durch

$$\Delta_P = \overleftarrow{\Delta_P^\downarrow} = \downarrow_P^\circ \circ \Delta_P^\downarrow \circ \downarrow_P^\bullet.$$

4.3.2 Weitere Zusammenhänge der Grundbegriffe

Viele der behandelten Eigenschaften von Abbildungen zwischen Grundbegriffen lassen sich für isotone bzw. antitone Abbildungen leichter nachweisen. So ist etwa eine isotone Abbildung $f\colon C \to D$ wegen $\gamma_C \geq \mathrm{id}_C$ bereits dann innenbindend, wenn $f \circ \gamma_C \leq f$ erfüllt ist. Für isotones f ist außerdem die Stetigkeit offensichtlich gleichbedeutend mit $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f$ und demnach auch mit $f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f$. Die letzte Ungleichung ist uns zusammen mit ihrem Pendant $\gamma_D \circ f \leq f \circ \gamma_C$ bereits in Beispiel 4.2.6 im Zusammenhang mit stetigen bzw. abgeschlossenen Funktionen im Sinne der Topologie begegnet. Dies nehmen wir zum Anlass für zwei weitere Grundbegriffe:

Definition 4.3.7 (Schwach stetige und stark abgeschlossene Abbildungen)**.** Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Eine Abbildung $f\colon C \to D$ heißt

$$\begin{aligned} &\textit{schwach stetig,} && \text{falls} && f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f && \text{gilt;} \\ &\textit{stark abgeschlossen,} && \text{falls} && \gamma_D \circ f \leq f \circ \gamma_C && \text{gilt.} \end{aligned}$$

Die Namensgebung in dieser Definition ist gerechtfertigt:

Lemma 4.3.8. *Jede stetige Funktion ist auch schwach stetig, und jede stark abgeschlossene Funktion ist insbesondere abgeschlossen.*

Beweis. Ist $f\colon C \to D$ stetig, so folgt $f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f$, also die schwache Stetigkeit.

Für eine stark abgeschlossene Funktion $f\colon C \to D$ gilt $\gamma_D \circ f \leq f \circ \gamma_C$ und wegen der Idempotenz von γ_C somit einerseits $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq f \circ \gamma_C$. Andererseits ist $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \geq f \circ \gamma_C$ bereits wegen der Extensivität von γ_D erfüllt, also f insgesamt abgeschlossen. $\square$

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f \text{ bindend}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{f \text{ innenbindend}} \arrow[d] & & \boxed{f \text{ außenbindend}} \arrow[d] \\
\boxed{f \text{ stetig}} \arrow[d, leftrightarrow] & & \boxed{f \text{ stark abgeschlossen}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{f \text{ schwach stetig}} & & \boxed{f \text{ abgeschlossen}}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4.6: Implikationen für isotone Abbildungen f

Wie für die bisher behandelten Grundbegriffe gilt:

Lemma 4.3.9. *Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen. Eine mehrstellige Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann schwach stetig (bzw. stark abgeschlossen), wenn sie als einstellige Abbildung $f\colon \prod C \to D$ schwach stetig (bzw. stark abgeschlossen) ist.* □

Die folgenden, für einstellige isotone bzw. antitone Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen formulierten Aussagen können mit Produkten von Hüllenstrukturen also mühelos auf mehrstellige Abbildungen übertragen werden.

Für beliebige Abbildungen folgt die schwache Stetigkeit aus der Stetigkeit, und die starke Abgeschlossenheit impliziert die Abgeschlossenheit. Im Falle *isotoner* Abbildungen gelten hiervon auch die Umkehrungen, wie wir gleich sehen werden. Das erklärt auch die verschiedenen Charakterisierungen der Stetigkeit bzw. Abgeschlossenheit im Beispiel 4.2.6, da für jede Abbildung $\alpha\colon X \to Y$ das direkte Bild $\alpha_\to\colon \mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}Y$ eine isotone Abbildung ist. Wir fassen die Beziehungen der Grundbegriffe für isotone Abbildungen im nächsten Theorem und dem zugehörigen Diagramm zusammen.

Theorem 4.3.10. *Seien C, D Hüllenstrukturen. Für isotone Abbildungen $f\colon C \to D$ gilt:*

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\iff f \text{ schwach stetig,} \\ f \text{ abgeschlossen} &\iff f \text{ stark abgeschlossen.} \end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich im isotonen Fall damit die in Abbildung 4.6 dargestellten Implikationen.

Beweis. Zur Stetigkeit: Sei f schwach stetig, also $f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f$. Daraus folgt einerseits $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f$, andererseits gilt wegen $\mathrm{id}_C \leq \gamma_C$ und der Isotonie von f auch $\gamma_D \circ f = \gamma_D \circ f \circ \mathrm{id}_C \leq \gamma_D \circ f \circ \gamma_C$. Somit ist f stetig.

Zur Abgeschlossenheit: Sei f abgeschlossen. Da f isoton ist, erhält man $\gamma_D \circ f = \gamma_D \circ f \circ \mathrm{id}_C \leq \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f \circ \gamma_C$ mit der Abgeschlossenheit von f. Demnach ist f auch stark abgeschlossen.

Die Umkehrungen gelten jeweils nach Lemma 4.3.8, und die übrigen in Abbildung 4.6 dargestellten Implikationen folgen aus Proposition 4.2.18. □

Im antitonen Fall stellt sich die Situation deutlich anders dar: *Jede* antitone Abbildung ist bereits schwach stetig, und eine bindende antitone Abbildung ist dasselbe wie eine stark abgeschlossene antitone. Bevor wir dies zeigen, charakterisieren wir die Stetigkeit und die Abgeschlossenheit unter Voraussetzung der Antitonie.

Proposition 4.3.11. *Seien C, D Hüllenstrukturen. Für antitone Abbildungen $f\colon C \to D$ gilt*

$$\begin{aligned} f \textit{ stetig} \quad &\iff \quad f \leq \gamma_D \circ f \circ \gamma_C, \\ f \textit{ abgeschlossen} \quad &\iff \quad \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq f. \end{aligned}$$

Beweis. Zur Stetigkeit: Ist f stetig, so folgt $f \leq \gamma_D \circ f = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C$. Für die umgekehrte Implikation erhält man aus $f \leq \gamma_D \circ f \circ \gamma_C$ mit der Antitonie $\gamma_D \circ f \leq \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f \circ \mathrm{id}_C = \gamma_D \circ f$, also die Stetigkeit von f.

Zur Abgeschlossenheit: Ist f abgeschlossen, so folgt zusammen mit der Antitonie $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = f \circ \gamma_C \leq f \circ \mathrm{id}_C = f$. Umgekehrt impliziert $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq f$ die Ungleichung $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \circ \gamma_C \leq f \circ \gamma_C$. Da $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \geq f \circ \gamma_C$ stets erfüllt ist, ergibt sich die Abgeschlossenheit von f. □

Auch für antitone Abbildungen stellen wir nun die wichtigsten Beziehungen der Grundbegriffe in einem Theorem und einem Diagramm zusammen.

Theorem 4.3.12. *Seien C, D Hüllenstrukturen und $f\colon C \to D$ eine antitone Abbildung. Dann ist f bereits schwach stetig, und die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist bindend.

(2) f ist stark abgeschlossen.

(3) f ist stetig und abgeschlossen.

Insgesamt ergeben sich im antitonen Fall damit die in Abbildung 4.7 dargestellten Implikationen.

Beweis. Zunächst impliziert die Antitonie $f \circ \gamma_C \leq f \circ \mathrm{id}_C = f \leq \gamma_D \circ f$, d. h. f ist schwach stetig.

(1) ⇔ (2): Da f antiton ist und die Eigenschaft bindend als innen- und außenbindend charakterisiert werden kann, gilt

$$f \text{ bindend} \quad \iff \quad \gamma_D \circ f = f = f \circ \gamma_C \quad \iff \quad \gamma_D \circ f \leq f \leq f \circ \gamma_C.$$

Ist also f bindend, so ist $\gamma_D \circ f \leq f \circ \gamma_C$ und folglich f stark abgeschlossen. Aus letzterem erhält man umgekehrt mit der Antitonie von f

$$\gamma_D \circ f \leq f \circ \gamma_C \leq f \circ \mathrm{id}_C = f \leq \gamma_D \circ f,$$

somit ist f bindend.

(1) ⇔ (3): Nach Proposition 4.2.18 ist jede bindende Abbildung auch stetig und abgeschlossen, und für antitone Abbildung liefert Proposition 4.3.11 die Umkehrung.

Alle übrigen Implikationen aus Abbildung 4.7 folgen aus Proposition 4.2.18. □

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f \text{ bindend}} \arrow[d, leftrightarrow] & \\
 & \boxed{f \text{ stark abgeschlossen}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{f \text{ innenbindend}} \arrow[d] & & \boxed{f \text{ außenbindend}} \arrow[d] \\
\boxed{f \text{ stetig}} & & \boxed{f \text{ abgeschlossen}}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4.7: Implikationen für antitone Abbildungen f

4.3.3 Nuklei auf Quantaloiden

In Vorbereitung auf das nächste Kapitel führen wir eine wichtige Konstruktion ein, um aus einem gegebenen Quantaloid neue zu gewinnen. Damit erhalten wir gleichzeitig eine interessante Anwendung für zweistellige (schwach) stetige Abbildungen.

Definition 4.3.13 (Quantaloidale Nuklei)**.** Sei $\mathcal{Q}$ ein Quantaloid. Ein *quantaloidaler Nukleus* $N\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, im folgenden auch einfach *Nukleus* genannt, ordnet

- jedem Objekt $A \in |\mathcal{Q}|$ wieder $N(A) = A$ zu (ist also auf $|\mathcal{Q}|$ die identische Funktion),
- je zwei Objekten $A, B \in |\mathcal{Q}|$ eine Hüllenoperation

  $$N_{AB}\colon \mathcal{Q}(A,B) \to \mathcal{Q}(A,B)$$

  zu (wobei meistens nur $N(f)$ oder Nf für $N_{AB}(f)$ geschrieben wird),

so dass für alle $f \in \mathcal{Q}(A,B)$, $g \in \mathcal{Q}(B,C)$ gilt:

$$N_{BC}(g) \circ N_{AB}(f) \leq N_{AC}(g \circ f). \tag{4.1}$$

Man beachte, dass ein quantaloidaler Nukleus $N\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ im allgemeinen *kein* Funktor ist. N ist aber ein sogenannter *laxer* Funktor auf der (lokal geordneten) 2-Kategorie $\mathcal{Q}$ (siehe etwa [12]), denn neben $N(g) \circ N(f) \leq N(g \circ f)$ gilt wegen der Extensivität von Hüllenoperationen auch $1_{N(A)} \leq N(1_A)$.

Bemerkung 4.3.14. Die Bedingung (4.1) in der Definition eines Nukleus N auf einem Quantaloid $\mathcal{Q}$ besagt gerade, dass jede der *Kompositionsabbildungen*

$$\circ_{ABC}\colon \mathcal{Q}(B,C) \times \mathcal{Q}(A,B) \to \mathcal{Q}(A,C)$$

von $\mathcal{Q}$ als Abbildung

$$\circ_{ABC}\colon (\mathcal{Q}(B,C), N_{BC}) \times (\mathcal{Q}(A,B), N_{AB}) \to (\mathcal{Q}(A,C), N_{AC})$$

zwischen vollständigen Hüllenstrukturen *schwach stetig* ist! Elementfrei lässt sich die Bedingung schreiben als

$$\circ_{ABC} \circ (N_{BC} \times N_{AB}) \leq N_{AC} \circ \circ_{ABC},$$

woran sich die schwache Stetigkeit sofort erkennen lässt.

Nun sind die Kompositionsabbildungen eines Quantaloids in beiden Variablen residuiert, also insbesondere isoton. Laut Theorem 4.3.10 ist (4.1) somit äquivalent dazu, dass die Komposition $\circ_{ABC}$ *stetig* ist bezüglich der Hüllenoperationen $N_{BC} \times N_{AB}$ und N_{AC}, also

$$N\big(N(g) \circ N(f)\big) = N(g \circ f)$$

gilt. Dies ist nach Theorem 4.2.28 auch gleichwertig mit der Stetigkeit in jeder Koordinate, d. h. mit

$$N(N(g) \circ f) = N(g \circ f) = N(g \circ N(f)).$$

Das folgende, aus [83] bereits bekannte Theorem zeigt, wie sich aus einem Nukleus N auf einem Quantaloid $\mathcal{Q}$ ein Quantaloid $\mathcal{Q}_N$ konstruieren lässt, welches insbesondere eine Quotienten-Kategorie von $\mathcal{Q}$ ist. Der Beweis greift auf ein Theorem zu mehrstelligen stetigen und residuierten Abbildungen zurück, das wir erst im Laufe des nächsten Kapitels entwickeln.

Theorem 4.3.15. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Quantaloid und $N\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ ein Nukleus. Dann ergibt sich durch die folgenden Festlegungen wieder ein Quantaloid $\mathcal{Q}_N$:*

- *Die Objekte von $\mathcal{Q}_N$ seien dieselben wie von $\mathcal{Q}$, d. h. $|\mathcal{Q}_N| := |\mathcal{Q}|$.*
- *$\mathcal{Q}_N(A, B)$ sei der Hüllenbereich von N_{AB}, d. h. $\mathcal{Q}_N(A, B) := (\mathcal{Q}(A, B), N_{AB})_\gamma$.*
- *Die Komposition $\odot_{ABC}\colon \mathcal{Q}_N(B, C) \times \mathcal{Q}_N(A, B) \to \mathcal{Q}_N(A, C)$ sei*

  $$\odot_{ABC} := \overrightarrow{\circ_{ABC}},$$

  also $g \odot f = N(g \circ f)$.
- *Die Identität $i_A \in \mathcal{Q}_N(A, A)$ sei*

  $$i_A := \overrightarrow{1_A}$$

  (wobei das Element $1_A \in \mathcal{Q}(A, A)$ wie üblich mit einer Abbildung $1 \to \mathcal{Q}(A, A)$ identifiziert wurde), also $i_A = N_{AA}(1_A)$.

Außerdem ist die Co-Restriktion $N^\bullet\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}_N$ von N ein Quantaloid-Homomorphismus.

Beweis. Als Hüllenbereich einer vollständigen Hüllenstruktur ist $\mathcal{Q}_N(A, B)$ jeweils wieder ein vollständiger Verband. Nach Voraussetzung ist jede (zweistellige) Kompositionsabbildung $\circ_{ABC}$ stetig und residuiert. In Theorem 5.3.11 wird später gezeigt, dass in diesem Fall auch $\odot_{ABC} = \overrightarrow{\circ_{ABC}}$ eine zweistellige residuierte Abbildung ist.

Für den Nachweis, dass $\mathcal{Q}_N$ ein Quantaloid ist, fehlen noch die Assoziativitäts- und Identitätsaxiome. Diese erhält man leicht mit der Stetigkeit der Komposition von $\mathcal{Q}$ (vergleiche die obige Bemerkung 4.3.14): Für alle $f \in \mathcal{Q}_N(A, B)$ ist

$$h \odot (g \odot f) = N\big(h \circ N(g \circ f)\big) = N(h \circ g \circ f) = N\big(N(h \circ g) \circ f\big) = (h \odot g) \odot f,$$
$$i_B \odot f = N(N(1_B) \circ f) = N(1_B \circ f) = f = N(f \circ 1_A) = N(f \circ N(1_A)) = f \odot i_A.$$

$N^\bullet$ ist ein Funktor, denn es gilt $N^\bullet_{AA}(1_A) = N_{AA}(1_A) = i_A$ und wegen der Stetigkeit außerdem $N^\bullet_{AC}(g \circ f) = N_{AC}(N_{BC}(g) \circ N_{AB}(f)) = N^\bullet_{BC}(g) \odot N^\bullet_{AB}(f)$. Schließlich sind alle Co-Restriktionen $N^\bullet_{AB}$ der Hüllenoperationen N_{AB} residuiert, also ist $N^\bullet$ ein Quantaloid-Homomorphismus. □

5 Vollstetigkeit

Die bisherigen Ergebnisse zu $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien, superalgebraischen Verbänden, Hüllenstrukturen und den Grundbegriffen für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen werden nun zusammengeführt. Wir beantworten in diesem Kapitel im wesentlichen die folgende Frage: *Für welche $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen geeigneten Hüllenstrukturen erhalten wir durch die kanonische Zuordnung*

$$f \mapsto \overrightarrow{f}$$

eine bijektive Korrespondenz mit allen $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen? Darüber hinaus stellen wir systematisch und ausführlich die wichtigsten Zusammenhänge zwischen den Grundbegriffen für Abbildungen sowie den Pfeil-Operatoren dar, die unter der speziellen Voraussetzung der $(\sigma;\tau)$-Residuiertheit gültig sind.

Eine weitreichende Anwendung der Resultate dieses Kapitels ergibt sich dann mit den verallgemeinerten Axialitäten aus Kapitel 3: Die Zuordnung $R \mapsto R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}$ ist eine Bijektion von der Menge aller Relationen zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und Y auf die Menge aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen $\mathfrak{P}X_1, \ldots, \mathfrak{P}X_n$ und $\mathfrak{P}Y$. Sind diese Potenzmengenverbände zusätzlich mit einer Hüllenoperation versehen, dann lassen sich die so entstehenden klassischen Hüllenstrukturen auch als Hüllenräume der Form (X_i, Γ_{X_i}) und (Y, Γ_Y) beschreiben. Durch die Kombination der beiden erwähnten Bijektionen zu

$$R \mapsto \overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}}$$

folgt damit unter anderem, dass *geeignete Relationen zwischen Hüllenräumen alle $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllensystemen auf kanonische Weise induzieren.* Dies wird erst im nächsten Kapitel weiter ausgeführt, ist aber für zahlreiche allgemeinere Feststellungen dieses Kapitels eine wichtige Motivation. Der Inhalt von Kapitel 6 dient daher auch als Beispiel für große Teile der im folgenden dargestellten, abstrakteren Theorie.

Das vorliegende Kapitel hat gewissermaßen enzyklopädischen Charakter, und es ist problemlos möglich, zunächst nur einen Teil zu lesen. Dieser sollte auf jeden Fall die Vorbereitungen (erster Abschnitt), die ersten vier Unterabschnitte zum einstelligen Fall (zweiter Abschnitt) und die Zusammenfassung zum Schluss des mehrstelligen Falls (dritter Abschnitt) beinhalten. Die übrigen Inhalte können kursorisch zur Kenntnis genommen und später bei Bedarf vertieft werden. Die kurze Zusammenfassung am Ende des Kapitels sei vor allem als allgemeine Antwort auf die oben erwähnte Fragestellung empfohlen.

Die Untersuchung $(\sigma;\tau)$-residuierter Familien über Hüllenstrukturen in diesem Kapitel ist anhand der Signaturen $(\sigma;\tau)$ systematisch aufgebaut. Wir beginnen mit dem einstelligen Fall, der in die vier möglichen Signaturen $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$ untergliedert ist. Im Mittelpunkt steht dabei die Betrachtung von Adjunktionen (also $(\sigma;\tau) = (+;+)$) und Galois-Verbindungen (d. h. $(\sigma;\tau) = (+;-)$), außerdem wird das wichtige Quantaloid der vollstetigen, residuierten Abbildungen vorgestellt. Im Anschluss an den einstelligen Fall wird dieser in mehreren Schritten auf den allgemeinen mehrstelligen ausgedehnt, was auch durch eine Unterscheidung nach gewissen Signaturen geschieht. Hier ergeben sich vor allem für die Signaturen $([+];+)$ und $([+];-)$ interessante Ergebnisse.

5.1 Vorbereitungen

5.1.1 σ-Vollstetigkeit

Der zentrale Begriff des gesamten Kapitels ist die sogenannte *σ-Vollstetigkeit*, ein weiterer Grundbegriff für Abbildungen zwischen (diesmal vollständigen) Hüllenstrukturen. Die Vollstetigkeit stellt eine Verschärfung der Stetigkeit dar und wird aufgrund ihrer Bedeutung für alle weiteren Ausführungen bereits an dieser Stelle definiert. Für $\bigvee$- und $\bigwedge$-Spektren vollständiger Verbände und die im folgenden verwendete Schreibweise $\mathcal{S}_\sigma C$ sei an Definition 3.1.1 erinnert.

Definition 5.1.1 (σ-Vollstetigkeit)**.** Es sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Familie vollständiger Hüllenstrukturen, D eine Hüllenstruktur und $\sigma \in \{+,-\}^n$. Eine n-stellige Abbildung $f\colon C \to D$ heißt *σ-vollstetig*, falls sie stetig ist und darüber hinaus gilt:

$$\gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = f \restriction \mathcal{S}_\sigma C. \tag{5.1}$$

Unter einer *vollstetigen* Abbildung $f\colon C \to D$ verstehen wir eine $[+]$-vollstetige.

Im Fall $n = 1$ ist eine vollstetige Abbildung somit dasselbe wie eine $(+)$-vollstetige. Eine $(-)$-vollstetige einstellige Abbildung wird im folgenden *co-vollstetig* genannt.

Ist $f\colon C \to D$ eine einstellige Abbildung zwischen einer vollständigen Hüllenstruktur C und einer Hüllenstruktur D, so gilt also

$$\begin{aligned} f \text{ vollstetig} \quad &\Longleftrightarrow \quad \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_+ C = f \restriction \mathcal{S}_+ C, \\ f \text{ co-vollstetig} \quad &\Longleftrightarrow \quad \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_- C = f \restriction \mathcal{S}_- C. \end{aligned}$$

Sei $(C; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen, und $C_1, \dots, C_n$ seien vollständig. Aufgrund der Extensivität von Hüllenoperationen ist die Bedingung (5.1) in der obigen Definition σ-vollstetiger Abbildungen natürlich äquivalent zu $\gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_\sigma C \leq f \restriction \mathcal{S}_\sigma C$. Außerdem ist jede stetige und außenbindende Abbildung $f\colon C \to D$ offensichtlich σ-vollstetig. Somit ist der Grundbegriff der σ-Vollstetigkeit zwischen den Eigenschaften stetig und bindend angesiedelt:

$$f \text{ bindend} \quad \Longrightarrow \quad f\ \sigma\text{-vollstetig} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ stetig}.$$

Die Umkehrungen dieser Implikationen gelten im allgemeinen nicht, wir werden später jedoch verschiedene Voraussetzungen kennenlernen, unter denen σ-vollstetige Abbildungen bereits bindend sind.

Konvention 5.1.2. Durch die Angabe von $\sigma \in \{+,-\}^n$ können wir im folgenden etwas lax auch eine einstellige Abbildung $f\colon \prod C \to D$ σ-vollstetig nennen, wenn wir uns eigentlich auf die mehrstellige Abbildung $f\colon C \to D$ beziehen. Es sei aber betont, dass die Vollstetigkeit von $f\colon \prod C \to D$ (d. h. f ist $(+)$-vollstetig) und die Vollstetigkeit von $f\colon C \to D$ (d. h. f ist $[+]$-vollstetig) im allgemeinen voneinander verschieden sind, da das Spektrum eines Produktverbands nicht mit dem Produkt der Spektren der einzelnen Faktoren übereinstimmen muss (vergleiche auch Lemma 3.1.14). Analog zur vereinbarten Verwendung des Begriffs der Residuiertheit in Konvention 2.2.3 werden wir – mit der nötigen Vorsicht – meistens sogar von der Vollstetigkeit der *mehrstelligen* Abbildung $f\colon \prod C \to D$ sprechen, wenn eigentlich die $[+]$-Vollstetigkeit von $f\colon C \to D$ gemeint ist.

Die Vollstetigkeit einer mehrstelligen Abbildung $f\colon C \to D$ ist im allgemeinen *nicht* dasselbe wie ihre koordinatenweise Vollstetigkeit. Ist f für jedes $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen σ_i-vollstetig, so ist zwar f auch σ-vollstetig, wie man mit (5.1) leicht erkennt. Die Umkehrung hiervon muss jedoch nicht gelten.

Ein Element von D, aufgefasst als Abbildung $\mathbf{1} \to D$, ist genau dann (co-)vollstetig, wenn es außenbindend ist (was in diesem Fall dasselbe ist wie abgeschlossen bzw. bindend, siehe Lemma 4.2.24).

5.1.2 Weitere Bezeichnungen

Neben der σ-Vollstetigkeit führen wir zur Vorbereitung auf die Betrachtung allgemeiner $(\sigma;\tau)$-residuierter Familien zwischen Hüllenstrukturen noch weitere „σ-Begriffe“ ein. In diesem Zusammenhang wird später auch der bereits aus Definition 2.2.7 bekannte Begriff des *σ-Erzeugers* (der *σ-dichten* Teilmenge) benötigt.

Definition 5.1.3 (σ-residuale Familien von Hüllenstrukturen)**.** Sei $\sigma \in \{+,-\}^n$. Eine Familie $C = (C_1,\ldots,C_n)$ von Hüllenstrukturen heißt *σ-residual*, falls für jedes $i \in \underline{n}$ im Fall $\sigma_i = -$ die Hüllenstruktur C_i residual ist.

Definition 5.1.4 (σ-stetige Abbildungen)**.** Sei $(C;D) = (C_1,\ldots,C_n;D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen und $\sigma \in \{+,-\}^n$. Eine n-stellige Abbildung $f\colon C \to D$ heißt *σ-stetig*, falls sie für jedes $i \in \underline{n}$ im Fall $\sigma_i = +$ in der i-ten Variablen stetig ist (d. h. $\gamma_D \circ f_i^a \circ \gamma_{C_i} = \gamma_D \circ f_i^a$ für alle $a \in \prod C$ gilt).

Eine $[+]$-stetige Abbildung ist somit dasselbe wie eine stetige.

Da wir in diesem Kapitel die wichtigsten Grundbegriffe für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Hüllenräumen untersuchen, legen wir noch einige geordnete Mengen $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen fest.

Definition 5.1.5 (Geordnete Mengen $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen)**.** Sei $(C;D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ eine Signatur. In der folgenden Tabelle werden die verwendeten Bezeichnungen für die punktweise geordnete Menge derjenigen $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen von C in D angegeben, die zusätzlich die nebenstehende Eigenschaft besitzen. Für die letzte Zeile seien $C_1, \ldots, C_n$ vollständig.

Bezeichnung	Abbildungen: $(\sigma;\tau)$-residuiert und ...
$\mathsf{cres}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$	stetig
$\mathsf{clres}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$	abgeschlossen
$\mathsf{bres}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$	bindend
$\mathsf{ccres}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$	σ-vollstetig

Alle diese geordneten Mengen sind also in $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$ enthalten. Wie für $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$ werden wir auch bei den obigen Notationen im Fall $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ auf die Angabe der Signatur verzichten. Beispielsweise steht $\mathsf{ccres}(C;D)$ für die geordnete Menge der vollstetigen, residuierten (genauer also $[+]$-vollstetigen, $([+];+)$-residuierten) Abbildungen von C nach D.

5.2 Einstelliger Fall

Bereits im vorigen Kapitel haben wir für Abbildungen $f\colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen gesehen, dass die Zuordnung $f \mapsto \overrightarrow{f}$ von kanonisch induzierten Abbildungen zwischen den

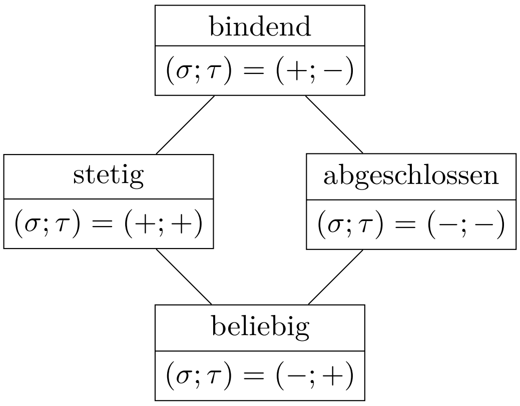

Abbildung 5.1: Hinreichende Bedingungen für den Erhalt der $(\sigma;\tau)$-Residuiertheit

Hüllenbereichen C_γ und D_γ einige Eigenschaften $\mathcal{E}$ erhält. Wird eine solche Eigenschaft $\mathcal{E}$ auch von $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ in der umgekehrten Richtung bewahrt, so sind nach Proposition 4.2.7 die punktweise geordneten Mengen

- aller *bindenden* Abbildungen mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ von C in D und
- aller Abbildungen mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ von C_γ in D_γ

isomorph vermöge der zueinander inversen Isomorphismen $f \mapsto \overrightarrow{f}$ und $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$. Dies wurde für beliebige, isotone bzw. antitone Abbildungen sowie im Fall $C = D$ auch für Hüllenoperationen gezeigt.

Es werden jedoch nicht alle der uns interessierenden Eigenschaften notwendigerweise von $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ übertragen, wie wir beispielsweise für die Residuiertheit in Kürze feststellen werden. Da wir die Funktionen zwischen Hüllenbereichen stets durch Hüllenbildung induzieren, bleiben nur zwei Strategien, um möglicherweise doch noch eine bijektive Korrespondenz für die jeweils gewünschte Eigenschaft $\mathcal{E}$ zu erhalten: geeignete Einschränkung der betrachteten Hüllenstrukturen C und D oder Änderung der Zuordnung $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ (oder beides zusammen). Wird die Zuordnung $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ abgeändert, so müssen es auch nicht mehr nur die *bindenden* Abbildungen mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ sein, die alle gewünschten Abbildungen zwischen den Hüllenbereichen induzieren.

Hinzu kommt, dass einige Eigenschaften $\mathcal{E}$ auch durch $f \mapsto \overrightarrow{f}$ gar nicht für *beliebige* Abbildung $f\colon C \to D$ übertragen werden. Dies trifft für drei der vier Signaturen $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$ insbesondere auf die Eigenschaft der $(\sigma;\tau)$-Residuiertheit zu. In Abbildung 5.1 sind für alle Signaturen $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$ *hinreichende* Eigenschaften dafür angegeben, dass mit jeder $(\sigma;\tau)$-residuierten Funktion $f\colon C \to D$ auch $\overrightarrow{f}\colon C_\gamma \to D_\gamma$ $(\sigma;\tau)$-residuiert ist. Die zugehörigen Aussagen werden im weiteren Verlauf des Kapitels gezeigt, und wir werden außerdem sehen, dass in jedem der vier Fälle gilt:

$$(\overrightarrow{f})^*_{(\sigma;\tau)} = \overrightarrow{f^*_{(\sigma;\tau)}}.$$

Die Aufgabe für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen wird darin bestehen, einerseits die Klasse der betrachteten Hüllenstrukturen geeignet einzuschränken und andererseits passende Bedingungen im Bereich von beliebigen bis bindenden Abbildungen zu finden, so dass für alle Signaturen $(\sigma;\tau)$ die gewünschten, kanonisch induzierten bijektiven Korrespondenzen entstehen. Wie bereits an dieser Stelle klar sein dürfte, spielt die σ-Vollstetigkeit hierbei eine entscheidende Rolle. Die bisherigen Überlegungen lassen sich später auch auf den allgemeinen Fall mehrstelliger Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen übertragen.

5.2.1 Residuierte Abbildungen

In unserer Untersuchung $(\sigma;\tau)$-residuierter Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen beginnen wir mit dem Fall $(\sigma;\tau) = (+;+)$, also mit einstelligen residuierten Abbildungen.

Für *residuierte* Hüllenstrukturen bewahrt $f \mapsto \overrightarrow{f}$ die Residuiertheit beliebiger Abbildungen:

Lemma 5.2.1. *Sei $f\colon C \to D$ eine Abbildung zwischen Hüllenstrukturen. Ist C eine* residuierte *Hüllenstruktur, so ist mit f auch $\overrightarrow{f}$ residuiert.*

Beweis. Die Co-Restriktion $\gamma_D^\bullet$ ist immer residuiert, und nach Proposition 4.1.8 ist nach Voraussetzung auch die Restriktion γ_C° residuiert. Wegen $\overrightarrow{f} = \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ$ folgt somit die Behauptung. □

Dies gilt für beliebige Hüllenstrukturen im allgemeinen nicht mehr. Das nächste Theorem (gewissermaßen der *Hauptsatz zur Stetigkeit und Abgeschlossenheit für Adjunktionen über Hüllenstrukturen*) zeigt, dass die Stetigkeit einer residuierten Abbildung f eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass auch $\overrightarrow{f}$ residuiert ist.

Theorem 5.2.2. *Seien C, D Hüllenstrukturen. Ist (f, g) eine Adjunktion zwischen C und D, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist stetig.

(2) g ist abgeschlossen.

(3) $\gamma_C \le g \circ \gamma_D \circ f$.

(4) $f \circ \gamma_C \circ g \le \gamma_D$.

(5) $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ ist eine Adjunktion zwischen C_γ und D_γ.

(6) $\varphi \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_D^\bullet \circ f$ für ein residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$.

(7) $\gamma_C^\circ \circ \psi = g \circ \gamma_D^\circ$ für ein dual residuiertes $\psi\colon D_\gamma \to C_\gamma$.

(8) Es gibt einen $\bigwedge$-Erzeuger M des Hüllenbereichs D_γ mit $\gamma_C \circ g \restriction M = g \restriction M$.

Dabei sind φ und ψ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$ und $\psi = \overrightarrow{g}$.

In Aussage (6) genügt es, die Gleichung für eine $\bigvee$-dichte Teilmenge von C zu verlangen, in (7) reicht die Beschränkung der Gleichung auf eine $\bigwedge$-dichte Teilmenge von D_γ.

Beweis. (1) ⇔ (3): Da f insbesondere isoton ist, lässt sich die Stetigkeit von f äquivalent als schwache Stetigkeit $f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f$ formulieren. Letzteres ist gleichbedeutend mit $\gamma_C \leq g \circ \gamma_D \circ f$, weil g obere Adjungierte von f ist. (2) ⇔ (4): Analog ergibt sich wegen der Äquivalenz von starker Abgeschlossenheit und Abgeschlossenheit von g die Behauptung, da f untere Adjungierte von g ist. (1) ⇒ (2): Sei f stetig, d. h. $f \circ \gamma_C \leq \gamma_D \circ f$. Da (f, g) eine Adjunktion ist, folgt

$$\gamma_C \circ g = \mathrm{id}_C \circ \gamma_C \circ g \leq g \circ f \circ \gamma_C \circ g \leq g \circ \gamma_D \circ f \circ g \leq g \circ \gamma_D \circ \mathrm{id}_D = g \circ \gamma_D,$$

also ist g abgeschlossen. (2) ⇒ (1): Ist g abgeschlossen, d. h. $\gamma_C \circ g \leq g \circ \gamma_D$, so ergibt sich

$$f \circ \gamma_C \leq f \circ \gamma_C \circ g \circ f \leq f \circ g \circ \gamma_D \circ f \leq \gamma_D \circ f,$$

also ist f stetig. (2) ⇔ (5): Da (f, g) eine Adjunktion ist, gilt $\mathrm{id}_C \leq g \circ f \leq \gamma_C \circ g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C$ und somit

$$\mathrm{id}_{C_\gamma} = \gamma_C^\bullet \circ \mathrm{id}_C \circ \gamma_C^\circ \leq \gamma_C^\bullet \circ g \circ \gamma_D^\circ \circ \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} \leq \mathrm{id}_{D_\gamma} \quad &\iff \quad \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ \circ \gamma_C^\bullet \circ g \circ \gamma_D^\circ \leq \mathrm{id}_{D_\gamma} \\
&\iff \quad \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \circ g \circ \gamma_D \leq \gamma_D^\circ \circ \mathrm{id}_{D_\gamma} \circ \gamma_D^\bullet = \gamma_D \\
&\iff \quad f \circ \gamma_C \circ g \circ \gamma_D \leq \gamma_D \\
&\iff \quad \gamma_C \circ g \circ \gamma_D \leq g \circ \gamma_D \\
&\iff \quad g \text{ abgeschlossen}
\end{aligned}$$

folgt nun die Behauptung. (1) ⇔ (6) und (2) ⇔ (7) ergeben sich aus dem bisher gezeigten und Theorem 4.2.5. (2) ⇒ (8) folgt mit $M = \gamma_D[Q] = D_\gamma$. (8) ⇒ (2): Sei $M \subseteq D_\gamma$ $\bigwedge$-dicht und $\gamma_C \circ g \restriction M = g \restriction M$. Mit g ist auch $g \circ \gamma_D^\circ$ dual residuiert, nach Voraussetzung also $(g \circ \gamma_D^\circ)[M] = g[M] \subseteq C_\gamma$ $\bigwedge$-dicht in C. Nach Lemma 4.2.17 ist $g \circ \gamma_D^\circ$ somit außenbindend und g folglich abgeschlossen.

In (6) und (7) genügt die Beschränkung auf eine $\bigvee$- bzw. $\bigwedge$-dichte Teilmenge, da die Abbildungen $\gamma_C^\bullet$, $\gamma_D^\bullet$ residuiert und γ_C°, γ_D° dual residuiert sind. □

Die beiden Grundbegriffe stetig und abgeschlossen hängen nach dem obigen Theorem also über Adjunktionen zusammen. Man beachte, dass die Aussagen (6) und (7) des Theorems über die aus Theorem 4.2.5 bekannten Beschreibungen hinausgehen. Auf eine Wiederholung äquivalenter Formulierungen für die Stetigkeit und die Abgeschlossenheit, die bereits allgemeiner für isotone Abbildungen gelten, wurde hier verzichtet, siehe dazu Theorem 4.3.10. Die Aussagen (3) und (4) des obigen Theorems finden sich als Teil einer ähnlichen Charakterisierung der Stetigkeit bzw. Abgeschlossenheit für Adjunktionen auch in [36, Theorem 4.10].

Im nächsten Korollar formulieren wir einige Aussagen von Theorem 5.2.2 erneut unter Betonung der unteren Adjungierten, d. h. für residuierte Abbildungen. Dual residuierte Abbildungen werden später noch eingehender betrachtet.

Korollar 5.2.3. *Für jede residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen und jede $\bigvee$-dichte Teilmenge J von C sind äquivalent:*

(1) f ist stetig.

(2) $\overrightarrow{f} \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_D^\bullet \circ f$.

(3) $\overrightarrow{f}$ *ist residuiert und* $\overrightarrow{f} \circ \gamma_C^\bullet \restriction J = \gamma_D^\bullet \circ f \restriction J$.

(4) $\overrightarrow{f}$ *ist residuiert und* $f \circ \gamma_C \restriction J \leq \gamma_D \circ f \restriction J$.

(5) $\overrightarrow{f}$ *ist residuiert und* $(\overrightarrow{f})^* = \overrightarrow{f^*}$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Theorem 5.2.2 und Theorem 4.2.5. □

Die Stetigkeit einer residuierten Abbildung f ist also eine *hinreichende* Voraussetzung dafür, dass auch die induzierte Abbildung $\overrightarrow{f}$ residuiert ist. Fordert man außerdem, dass das Residual der induzierten Abbildung gerade die induzierte Abbildung des Residuals ist, also $(\overrightarrow{f})^* = \overrightarrow{f^*}$ gilt, so ist die Stetigkeit von f auch *notwendig*.

In den folgenden drei Beispielen zeigen wir einige der vielen (theoretischen) Anwendungen von Theorem 5.2.2.

Beispiel 5.2.4. Sei C eine Hüllenstruktur. Die folgenden Aussagen sind wohlbekannt:

(a) Ist C *ein* $\vee$*-Halbverband, so auch* C_γ*, und für* $v, w \in C_\gamma$ *ist* $v \vee_{C_\gamma} w = \gamma_C(v \vee_C w)$.

(b) Ist C *ein* $\wedge$*-Halbverband, so auch* C_γ*, und für* $v, w \in C_\gamma$ *ist* $v \wedge_{C_\gamma} w = v \wedge_C w$.

(c) Hat C *ein kleinstes Element* $\bot_C$*, so ist* $\bot_{C_\gamma} = \gamma_C(\bot_C)$ *das kleinste Element von* C_γ.

(d) Besitzt C *ein größtes Element* $\top_C$*, so ist* $\top_{C_\gamma} = \top_C$ *das größte Element von* C_γ.

Wir zeigen, wie sich (a)–(d) aus Theorem 5.2.2 ergeben. Dafür sei $\delta_C \colon C \to C \times C$ die *Diagonalfunktion* von C mit

$$\delta_C(x) = (x, x).$$

C ist genau dann ein $\vee$-Halbverband, wenn δ_C eine untere Adjungierte besitzt, und diese ist dann das binäre Supremum $\vee_C \colon C \times C \to C$ in C, denn

$$x \leq_C z \,\&\, y \leq_C z \iff (x, y) \leq_{C \times C} \delta_C(z) \iff \vee_C(x, y) \leq_C z.$$

Dual ist C genau dann ein $\wedge$-Halbverband, wenn δ_C eine obere Adjungierte besitzt, welche in diesem Fall das binäre Infimum $\wedge_C \colon C \times C \to C$ in C ist. Nun gilt trivialerweise

$$\gamma_{C \times C} \circ \delta_C = \delta_C \circ \gamma_C,$$

d. h. die Diagonalfunktion $\delta_C \colon C \to C \times C$ ist stetig und abgeschlossen.

Ist also C ein $\vee$-Halbverband und somit $(\vee_C, \delta_C)$ eine Adjunktion, so folgt aus Theorem 5.2.2, dass $(\overrightarrow{\vee_C}, \overrightarrow{\delta_C})$ eine Adjunktion zwischen $C_\gamma \times C_\gamma$ und C_γ ist (außerdem erhält man aus dem Theorem die Stetigkeit von $\vee_C$, d. h. $\gamma_C(x) \vee_C \gamma_C(y) \leq \gamma_C(x \vee_C y)$, die man mit der Isotonie von γ_C aber auch leicht direkt sieht und die für beliebige Suprema bereits in Lemma 4.1.10 auftritt). Die induzierte Abbildung $\overrightarrow{\delta_C}$ ist gerade die Diagonalfunktion δ_{C_γ} von C_γ, denn $\overrightarrow{\delta_C}(c) = \gamma_{C \times C}(c, c) = (\gamma_C(c), \gamma_C(c)) = (c, c)$. Folglich ist C_γ ein $\vee$-Halbverband mit der Supremum-Abbildung $\overrightarrow{\vee_C}$, also

$$c \vee_{C_\gamma} d = c \overrightarrow{\vee_C} d = \gamma_C(c \vee_C d).$$

Ist C ein $\wedge$-Halbverband, d. h. $(\delta_C, \wedge_C)$ eine Adjunktion, so ergibt sich aus Theorem 5.2.2, dass $(\overrightarrow{\delta_C}, \overrightarrow{\wedge_C})$ eine Adjunktion zwischen C_γ und $C_\gamma \times C_\gamma$ ist. Darüber hinaus ist $\wedge_C$ abgeschlossen. Somit ist C_γ ein $\wedge$-Halbverband mit

$$c \wedge_{C_\gamma} d = c \overrightarrow{\wedge_C}\, d = \gamma_C(c \wedge_C d) = c \wedge_C d.$$

Man betrachte nun die eindeutige Abbildung $!_C \colon C \to \mathbf{1}$. Sie besitzt genau dann eine untere Adjungierte $b_C \colon \mathbf{1} \to C$, wenn C ein kleinstes Element hat. Dieses ist dann gerade $\bot_C = b_C(0)$, denn wegen $!_C(x) = 0$ für alle $x \in C$ ist auch die rechte Seite in

$$0 \leq_{\mathbf{1}} !_C(x) \quad \Longleftrightarrow \quad b_C(0) \leq_C x$$

stets erfüllt. Dual besitzt $!_C$ genau dann eine obere Adjungierte $t_C \colon \mathbf{1} \to C$, wenn C ein größtes Element besitzt, welches in diesem Fall $\top_C = t_C(0)$ ist. Wie üblich identifizieren wir die Elemente $\bot_C$ und $\top_C$ mit den Abbildungen b_C bzw. t_C.

Hat also C ein kleinstes Element $\bot_C$, so ist $(\bot_C, !_C)$ eine Adjunktion. Offensichtlich gilt $\gamma_{\mathbf{1}} \circ !_C = !_C = !_C \circ \gamma_C$, d. h. $!_C$ ist bindend, und bereits nach Lemma 4.2.24 ist $\bot_C$ stetig. Somit ist auch $(\overrightarrow{\bot_C}, \overrightarrow{!_C})$ eine Adjunktion, und $\overrightarrow{!_C} = !_{C_\gamma}$ ist die eindeutige Abbildung von $\mathbf{1}$ in C_γ, also $\overrightarrow{\bot_C} = \gamma_C(\bot_C)$ das kleinste Element $\bot_{C_\gamma}$ von C_γ.

Besitzt C ein größtes Element $\top_C$, dann ist $(!_C, \top_C)$ eine Adjunktion und somit auch $(\overrightarrow{!_C}, \overrightarrow{\top_C})$. Da außerdem $\top_C$ abgeschlossen ist, erhält man das größte Element $\top_{C_\gamma}$ von C_γ durch $\overrightarrow{\top_C} = \top_C$.

Beispiel 5.2.5. Sei C eine Hüllenstruktur. Die Beziehungen aus dem vorigen Beispiel lassen sich auf Diagonalfunktionen $\delta_C^I \colon C \to C^I$ für beliebige Indexmengen I verallgemeinern. Dabei ordnet δ_C^I jedem $x \in C$ die Familie $(\, x : i \in I\,)$ zu, wobei sich in den speziellen Fällen $I = \underline{2}$ und $I = \underline{0} = \emptyset$ die Abbildungen δ_C bzw. $!_C$ des vorigen Beispiels ergeben. Analog zu diesen Fällen ist allgemeiner für jede Indexmenge I die Existenz einer unteren bzw. oberen Adjungierten der Funktion δ_C^I äquivalent zur Existenz einer Supremum- bzw. Infimum-Abbildung von C^I in C. Dies ist natürlich selbst nur ein Spezialfall der bekannten kategorientheoretischen Tatsache, dass Co-Produkte die Linksadjungierten und Produkte die Rechtsadjungierten von Diagonalfunktoren sind. Fasst man eine geordnete Mengen als Kategorie auf, so entsprechen Co-Produkte den Suprema und Produkte den Infima.

Durch Anwendung von Theorem 5.2.2 erhält man auf diese Weise erneut die Aussage von Proposition 1.2.30 über die Hüllenbereiche vollständiger Verbände:

> *Ist C eine vollständige Hüllenstruktur, so ist C_γ ein vollständiger Verband mit $\bigvee_{C_\gamma} A = \gamma_C(\bigvee_C A)$ und $\bigwedge_{C_\gamma} A = \bigwedge_C A$ für alle $A \subseteq C_\gamma$.*

Die Begründung verläuft genauso wie im vorigen Beispiel: Für jede Indexmenge I ist die Diagonalfunktion δ_C^I stetig und abgeschlossen, also die I-stellige Supremum-Abbildung stetig und die I-stellige Infimum-Abbildung abgeschlossen (vergleiche Lemma 4.1.10). Wegen $\overrightarrow{\delta_C^I} = \delta_{C_\gamma}^I$ ergibt sich dann die Behauptung.

Beispiel 5.2.6. Sei C eine Hüllenstruktur und außerdem ein $\vee$-Halbverband. Offensichtlich ist der Hüllenbereich C_γ genau dann unter $\vee_C$ abgeschlossen (d. h. ein $\vee$-Unter-Halbverband von C), wenn die Supremum-Abbildung $\vee_C \colon C \times C \to C$ abgeschlossen ist. Da $\vee_C$ immer stetig ist (vergleiche die beiden vorigen Beispiele), ist die Abgeschlossenheit von $\vee_C$ nach Lemma 4.2.21 äquivalent zu

$$\gamma_C(x \vee y) = \gamma_C(x) \vee \gamma_C(y)$$

für alle $x, y \in C$. Mit anderen Worten: $\vee_C$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn* γ_C $\vee$-*erhaltend ist.* Besitzt C ein kleinstes Element $\bot_C$, so ist dieses genau dann abgeschlossen (d. h. $\bot_C \in C_\gamma$), wenn $\gamma_C(\bot) = \bot$ gilt.

Damit korrespondieren *topologische Räume* (formuliert mit abgeschlossenen Mengen) genau mit denjenigen *klassischen* Hüllenstrukturen C, für die $\vee_C$ und $\bot_C$ abgeschlossen sind.

Auch in diesem Beispiel lassen sich die bisherigen Feststellungen auf I-stellige Supremum-Abbildungen für beliebige Indexmengen I verallgemeinern. Mit derselben Argumentation wie oben ergibt sich für jede vollständige Hüllenstruktur C die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) C_γ *ist ein vollständiger Unterverband von* C.

(2) Alle Supremum-Abbildungen $\bigvee_C \colon C^I \to C$ *sind abgeschlossen.*

(3) γ_C *ist residuiert.*

Auf diese Weise erhält man erneut Proposition 4.1.11.

Im Hinblick auf stetige, residuierte Abbildungen vermerken wir noch:

Lemma 5.2.7. *Für vollständige Hüllenstrukturen* C, D *ist die geordnete Menge* $\mathsf{cres}(C; D)$ *aller stetigen, residuierten Abbildungen von* C *in* D *ein vollständiger Verband, in dem Suprema punktweise gebildet werden.*

Beweis. Das Supremum residuierter Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden wird punktweise gebildet. Nach Proposition 4.2.29 ist außerdem das punktweise Supremum stetiger Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden wieder stetig. □

Ähnlich wie das Begriffspaar stetig und abgeschlossen im Falle von Adjunktionen verhält sich auch das Paar innenbindend und außenbindend:

Theorem 5.2.8. *Seien* C, D *Hüllenstrukturen und* (f, g) *eine Adjunktion zwischen* C *und* D. *Dann sind äquivalent:*

(1) f *ist innenbindend.*

(2) g *ist außenbindend.*

(3) Es gibt einen $\bigwedge$-*Erzeuger* M *der Hüllenstruktur* D *mit* $\gamma_C \circ g \restriction M = g \restriction M$.

(4) $\gamma_C \leq g \circ f$.

(5) $g \circ f$ *ist bindend (bzw. innenbindend bzw. außenbindend).*

(6) $(g \circ f)[C] \subseteq C_\gamma$.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (4): Da (f,g) eine Adjunktion ist, gilt

$$f \circ \gamma_C = f \quad \Longleftrightarrow \quad f \circ \gamma_C \le f \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_C \le g \circ f.$$

(2) $\Rightarrow$ (4): Wegen $\mathrm{id}_C \le g \circ f$ ist $\gamma_C \le \gamma_C \circ g \circ f = g \circ f$, falls g außenbindend ist. (4) $\Rightarrow$ (2): Aus $\gamma_C \le g \circ f$ folgt $\gamma_C \circ g \le g \circ f \circ g = g$, also $\gamma_C \circ g = g$. (2) $\Rightarrow$ (3) ist klar. (3) $\Rightarrow$ (2): Sei $M \subseteq Q$ $\bigwedge$-dicht und $\gamma_C \circ g \restriction M = g \restriction M$. Dann ist $g[M] \subseteq C_\gamma$ $\bigwedge$-dicht in C, nach Lemma 4.2.17 also g außenbindend. (1) $\Rightarrow$ (5): Ist f innenbindend, so ist wegen der Äquivalenz von (1) und (2) g außenbindend und somit $g \circ f$ bindend. Analog ergibt sich (2) $\Rightarrow$ (5). (5) $\Rightarrow$ (1): Ist $g \circ f$ innenbindend, so gilt $f \circ \gamma_C = f \circ g \circ f \circ \gamma_C = f \circ g \circ f = f$. Analog erhält man (5) $\Rightarrow$ (2): Ist $g \circ f$ außenbindend, so gilt $\gamma_D \circ g = \gamma_D \circ g \circ f \circ g = g \circ f \circ g = g$. (5) $\Leftrightarrow$ (6): $(g \circ f)[C] \subseteq C_\gamma$ ist gleichbedeutend damit, dass $g \circ f$ außenbindend ist. □

Für jede Adjunktion (f,g) ist $g \circ f$ eine Hüllenoperation. Die Äquivalenz der Aussagen (4) und (6) des obigen Theorems folgt also bereits aus Korollar 4.2.16. Außerdem ist nach Theorem 1.2.41 $(g \circ f)[C] = g[D]$, was sofort die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (6) liefert.

Für bindende Abbildungen im Zusammenhang mit Adjunktionen erhält man:

Korollar 5.2.9. *Sei (f,g) eine Adjunktion zwischen den Hüllenstrukturen C und D. Es gilt:*

$$f \text{ bindend} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ außenbindend} \ \& \ g \text{ außenbindend.}$$

Beweis. Die Abbildung f ist genau dann bindend, wenn sie innen- und außenbindend ist. Die Behauptung folgt somit aus Theorem 5.2.8. □

Nach Korollar 5.2.3 ist eine residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ genau dann stetig, wenn $f \circ \gamma_C \restriction J \le \gamma_D \circ f \restriction J$ für einen $\bigvee$-Erzeuger J von C gilt und $\overrightarrow{f}$ residuiert ist. Auf die letzte Bedingung kann nach Lemma 5.2.1 verzichtet werden, falls die Hüllenstruktur C residuiert ist. Ähnliche Aussagen gelten auch für die übrigen Eigenschaften:

Lemma 5.2.10. *Seien C, D Hüllenstrukturen, $f\colon C \to D$ eine residuierte Abbildung und J eine $\bigvee$-dichte Teilmenge von C. Es gilt*

$$\begin{array}{rcll} f \text{ stetig} & \Longleftrightarrow & f \circ \gamma_C \restriction J \le \gamma_D \circ f \restriction J, & \text{falls } C \text{ residuiert ist;} \\ f \text{ innenbindend} & \Longleftrightarrow & f \circ \gamma_C \restriction J \le f \restriction J, & \text{falls } C \text{ residuiert ist;} \\ f \text{ außenbindend} & \Longleftrightarrow & \gamma_D \circ f \restriction J \le f \restriction J, & \text{falls } D \text{ residuiert ist;} \\ f \text{ abgeschlossen} & \Longleftrightarrow & \gamma_D \circ f \restriction J \le f \circ \gamma_C \restriction J, & \text{falls } C \text{ und } D \text{ residuiert sind.} \end{array}$$

Beweis. Mit Proposition 1.2.36. □

Entsprechende Charakterisierungen der Grundbegriffe ergeben sich für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen geeignet residuierten oder residualen Hüllenstrukturen auch für die übrigen Signaturen $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^2$, was wir jedoch nicht weiter ausführen werden.

5.2.2 Vollstetigkeit für residuierte Abbildungen

Analog zu $f \mapsto \overrightarrow{f}$ bewahrt für *residuierte* Hüllenstrukturen auch $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ die Residuiertheit:

Lemma 5.2.11. *Seien C, D Hüllenstrukturen. Ist D eine* residuierte *Hüllenstruktur, so ist mit $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ auch $\overleftarrow{\varphi}$ residuiert.*

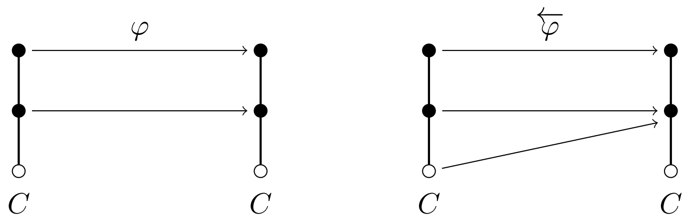

Abbildung 5.2: Zur kanonischen Fortsetzung residuierter Abbildungen

Beweis. Mit $\overleftarrow{\varphi} = \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet$ und Proposition 4.1.8 $\square$

Allerdings gilt dies für beliebige Hüllenstrukturen im allgemeinen nicht mehr, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.2.12. Man betrachte die Hüllenstruktur C aus Abbildung 5.2. Die dargestellte Funktion $\varphi := \mathrm{id}_{C_\gamma} : C_\gamma \to C_\gamma$ ist residuiert, *nicht* aber $\overleftarrow{\varphi} : C \to C$ (denn $\overleftarrow{\varphi}(\bot_C) \neq \bot_C$).

Die Idee ist nun, mit den Methoden aus Kapitel 3 – also für *superalgebraische* Hüllenstrukturen – die fortgesetzte Abbildung $\overleftarrow{\varphi}$ zu einer residuierten Abbildung

$$\tilde{\overleftarrow{\varphi}} = (\overleftarrow{\varphi})^\sim = (\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(+;+)}$$

zu glätten (siehe Definition 3.1.18), um durch $\varphi \mapsto \tilde{\overleftarrow{\varphi}}$ eine bijektive Korrespondenz aller residuierten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen mit geeigneten residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenstrukturen zu erhalten. Das nächste Theorem zeigt, dass dieses Vorgehen auf vollstetige, residuierte Funktionen zwischen superalgebraischen Hüllenstrukturen führt.

Theorem 5.2.13. *Seien C, D Hüllenstrukturen und C superalgebraisch. Eine residuierte Abbildung $f\colon P \to Q$ ist genau dann vollstetig, wenn es ein residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ gibt mit*

$$f \restriction \mathcal{S}C = \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}C.$$

In diesem Fall ist φ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$.

Beweis. Sei $f\colon C \to D$ residuiert. Ist f vollstetig, so gilt

$$\overset{\leftrightarrows}{f} \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}C = f \restriction \mathcal{S}C.$$

Umgekehrt folgt aus $\overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet \restriction \mathcal{S}C = f \restriction \mathcal{S}C$ für ein residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ zunächst $\varphi \circ \gamma_C^\bullet \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D^\bullet \circ f \restriction \mathcal{S}C$ und damit die Stetigkeit von f (sowie die Eindeutigkeit von φ) nach Theorem 5.2.2, da $\mathcal{S}C$ ein $\bigvee$-Erzeuger von C ist. Außerdem gilt in diesem Fall

$$\gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D^\circ \circ \gamma_D^\bullet \circ f \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet \restriction \mathcal{S}C = f \restriction \mathcal{S}C,$$

also ist f vollstetig. $\square$

Diese Charakterisierung der Vollstetigkeit residuierter Abbildungen impliziert:

Korollar 5.2.14. *Sei C eine superalgebraische und D eine vollständige Hüllenstruktur. Für jede residuierte Abbildung $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ ist*

$$\tilde{\overleftarrow{\varphi}}\colon C \to D$$

residuiert und vollstetig.

Beweis. Nach Korollar 3.1.20 ist $\tilde{\overleftarrow{\varphi}}$ residuiert und außerdem $\tilde{\overleftarrow{\varphi}} \restriction \mathcal{S}C = \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}C$, da $\overleftarrow{\varphi}$ isoton ist. Laut Theorem 5.2.13 ist $\tilde{\overleftarrow{\varphi}}$ somit vollstetig. □

In Vorbereitung auf das nächste Theorem zeigen wir ein hinreichendes Kriterium für die Gleichheit von residuierten induzierten Abbildungen im Falle der Stetigkeit.

Lemma 5.2.15. *Seien C, D Hüllenstrukturen, $f_1, f_2\colon C \to D$ stetige Abbildungen und J ein $\bigvee$-Erzeuger von C. Sind $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ residuiert und stimmen f_1 und f_2 auf J überein, so ist bereits $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_2}$.*

Beweis. Aus $f_1 \restriction J = f_2 \restriction J$ ergibt sich wegen der Stetigkeit mit Theorem 5.2.2

$$\overrightarrow{f_1} \circ \gamma_C^\bullet \restriction J = \gamma_D^\bullet \circ f_1 \restriction J = \gamma_D^\bullet \circ f_2 \restriction J = \overrightarrow{f_2} \circ \gamma_C^\bullet \restriction J.$$

Nun ist die Menge $\gamma_C^\bullet[J]$ $\bigvee$-dicht in C_γ, da $\gamma_C^\bullet$ residuiert ist. Folglich sind die residuierten Abbildungen $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ identisch. □

Wir sehen nun, dass die stetigen, residuierten Abbildungen zwischen superalgebraischen Hüllenstrukturen bereits alle residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen induzieren (denn $f \mapsto \overrightarrow{f}$ ist unter diesen Voraussetzungen surjektiv). Außerdem klären wir das Verhältnis von $f \mapsto \overrightarrow{f}$ und $\varphi \mapsto \tilde{\overleftarrow{\varphi}}$.

Theorem 5.2.16. *Seien C, D vollständige Hüllenstrukturen und C superalgebraisch. Die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
\Phi = \Phi_{C,D}\colon \mathsf{cres}(C; D) &\to \mathsf{res}(C_\gamma; D_\gamma), \quad f \mapsto \overrightarrow{f}, \\
\Psi = \Psi_{C,D}\colon \mathsf{res}(C_\gamma; D_\gamma) &\to \mathsf{cres}(C; D), \quad \varphi \mapsto \tilde{\overleftarrow{\varphi}}
\end{aligned}$$

sind beide isoton, und für alle $f \in \mathsf{cres}(C; D)$, $\varphi \in \mathsf{res}(C_\gamma; D_\gamma)$ gilt

$$f \leq \tilde{\overleftarrow{\overrightarrow{f}}} \quad \textit{und} \quad \overrightarrow{\tilde{\overleftarrow{\varphi}}} = \varphi,$$

d. h. (Φ, Ψ) ist eine Adjunktion, Φ ist surjektiv und Ψ injektiv.

Beweis. Die Isotonie von Φ und Ψ folgt aus Proposition 4.2.7 und Korollar 3.1.20.

Sei $f\colon C \to D$ stetig und residuiert. Es ist $f \leq \overleftarrow{\overrightarrow{f}}$, und wegen der Residuiertheit gilt wiederum nach Korollar 3.1.20

$$f = \tilde{f} \leq \tilde{\overleftarrow{\overrightarrow{f}}}.$$

Sei $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ residuiert. Die Abbildungen $\tilde{\overleftarrow{\varphi}}$ und $\overleftarrow{\varphi}$ stimmen auf $\mathcal{S}C$ überein, $\overleftarrow{\varphi}$ ist bindend, also stetig, und $\tilde{\overleftarrow{\varphi}}$ ist (voll-)stetig und residuiert. Mit Lemma 5.2.15 folgt daraus

$$\overrightarrow{\tilde{\overleftarrow{\varphi}}} = \overrightarrow{\overleftarrow{\varphi}} = \varphi.$$

□

Bevor wir die Komponenten der Adjunktion $(\Phi_{C,D}, \Psi_{C,D})$ so beschränken, dass die gewünschten, zueinander inversen Isomorphismen zwischen der geordneten Menge aller *vollstetigen*, residuierten Abbildungen von C in D und der aller residuierten Abbildungen von C_γ in D_γ entstehen, betrachten wir die durch $(\Phi_{C,D}, \Psi_{C,D})$ erzeugte Hüllenoperation auf $\mathsf{cres}(C; D)$ genauer.

Definition 5.2.17 (Vollstetige Hüllen stetiger, residuierter Abbildungen)**.** Sei C eine superalgebraische und D eine vollständige Hüllenstruktur. Die Funktion $\Psi_{C,D} \circ \Phi_{C,D}$ aus Theorem 5.2.16 ist eine Hüllenoperation auf dem vollständigen Verband $\mathsf{cres}(C; D)$ aller stetigen, residuierten Abbildungen von C in D (in dem Suprema punktweise gebildet werden). Wir schreiben

$$\overline{f} := \overset{\leftrightarrows}{f} = (\gamma_D \circ f)^{\sim} = (\Psi_{C,D} \circ \Phi_{C,D})(f)$$

für jedes $f \in \mathsf{cres}(C; D)$ und nennen $\overline{f}$ die *vollstetige Hülle* von f.

Nach Definition ist die vollstetige Hülle $\overline{f}$ einer stetigen, residuierten Abbildung f stets vollstetig und residuiert, außerdem ist $\overline{f}$ die kleinste vollstetige und residuierte Abbildung g mit $f \leq g$. Im folgenden werden weitere elementare Eigenschaften der vollstetigen Hülle aufgeführt.

Proposition 5.2.18. *Seien C, D vollständige Hüllenstrukturen, C superalgebraisch, und seien $f, g\colon C \to D$ stetig und residuiert.*

(a) (i) $f \leq g \Rightarrow \overline{f} \leq \overline{g}$, (ii) $f \leq \overline{f}$, (iii) $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$.

(b) Für alle $x \in C$ ist

$$\overline{f}(x) = \bigvee\nolimits_D (\gamma_D \circ f)[{\downarrow_C} x \cap \mathcal{S}C] = \bigvee\nolimits_D \{\, (\gamma_D \circ f)(u) : x \geq_C u \in \mathcal{S}C \,\}.$$

(c) $\overline{f} \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}C$.

(d) $\overrightarrow{\overline{f}} = \overrightarrow{f}$ und $\gamma_D \circ \overline{f} = \gamma_D \circ f$.

(e) $\overline{\mathrm{id}_C} = \overline{\gamma_C}$.

Beweis. Die Aussagen in (a) ergeben sich unmittelbar daraus, dass $f \mapsto \overline{f}$ eine Hüllenoperation ist. Zusammen mit der Stetigkeit von f erhält man nach Definition der $(+;+)$-Glättung

$$\overline{f}(x) = \overset{\leftrightarrows}{f}(x) = \bigvee \overset{\leftrightarrows}{f}[{\downarrow} x \cap \mathcal{S}C] = \bigvee (\gamma_D \circ f \circ \gamma_C)[{\downarrow} x \cap \mathcal{S}C] = \bigvee (\gamma_D \circ f)[{\downarrow} x \cap \mathcal{S}C]$$

für alle $x \in C$, insbesondere also $\overline{f} \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}C$. Dies zeigt die Aussagen (b) und (c). Zu (d): Aus Theorem 5.2.16 folgt mit den Eigenschaften von Adjunktionen

$$\overrightarrow{\overline{f}} = \overrightarrow{\overset{\leftrightarrows}{f}} = \overrightarrow{f},$$

also die erste Behauptung, und damit auch die zweite, denn

$$\gamma_D \circ \overline{f} = \gamma_D \circ \overline{f} \circ \gamma_C = \overset{\leftrightarrows}{\overline{f}} = \overset{\leftrightarrows}{f} = \gamma_D \circ f.$$

Schließlich gilt (e) wegen $\overrightarrow{\mathrm{id}_C} = \mathrm{id}_{C_\gamma} = \overrightarrow{\gamma_C}$ (vergleiche Lemma 4.2.9). $\square$

Die vollstetige Hülle $\overline{f}$ einer stetigen, residuierten Abbildung f ist einerseits die *kleinste* vollstetige, residuierte Abbildung, die über f liegt.

Andererseits kann die vollstetige Hülle $\overline{f}$ auch charakterisiert werden als die *größte* stetige, residuierte Abbildung h, die dieselbe Funktion wie f induziert, für die also $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{f}$ gilt. Dem liegt die folgende, rein ordnungstheoretische Beobachtung zugrunde, die unseres Wissens in der gängigen ordnungstheoretischen Literatur noch keine Erwähnung gefunden hat:

Proposition 5.2.19. *Seien P, Q geordnete Mengen und $f\colon P \to Q$ eine residuierte Abbildung. Für jedes $x \in P$ besitzt die Menge $E^f_x := \{\, y \in P : f(y) = f(x) \,\}$ ein größtes Element in P, denn es gilt*

$$(f^* \circ f)(x) = \max\{\, y \in P : f(y) = f(x) \,\}.$$

Durch die Festlegung $\gamma(x) = \max E^f_x$ erhält man also zu jedem residuierten $f\colon P \to Q$ eine Hüllenoperation γ auf P, und jede Hüllenoperation auf P entsteht auf diese Weise.

Beweis. Es ist $E^f_x \subseteq \{\, y \in P : f(y) \leq_Q f(x) \,\} = f^{-1}[\downarrow_Q f(x)]$. Aus der Residuiertheit von f folgt $f \circ f^* \circ f = f$ und somit (siehe Proposition 1.2.35)

$$\max f^{-1}[\downarrow_Q f(x)] = f^*(f(x)) \in E^f_x \subseteq f^{-1}[\downarrow_Q f(x)],$$

also $\max E^f_x = (f^* \circ f)(x)$. Alles weitere folgt aus den bekannten Grundlagen zu Adjunktionen und Hüllenoperationen (siehe Theorem 1.2.41 und Lemma 1.2.42). □

Theorem 5.2.20. *Sei C eine superalgebraische und D eine vollständige Hüllenstruktur. Für jede residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist vollstetig.

(2) f ist stetig und $f = \overline{f}$.

(3) $f = \max\{\, h \in \mathsf{cres}(C; D) : \overrightarrow{h} = \overrightarrow{f} \,\}$.

Beweis. Sei $f\colon C \to D$ eine residuierte Abbildung. (1) ⇔ (2): Falls f stetig ist, erhält man mit Proposition 5.2.18

$$f \restriction \mathcal{S}C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}C \quad\Longleftrightarrow\quad f \restriction \mathcal{S}C = \overline{f} \restriction \mathcal{S}C \quad\Longleftrightarrow\quad f = \overline{f}$$

und damit die Behauptung. (2) ⇔ (3): Nach Theorem 5.2.16 ist die Abbildung

$$\Phi\colon \mathsf{cres}(C; D) \to \mathsf{res}(C_\gamma; D_\gamma), \quad h \mapsto \overrightarrow{h}$$

residuiert, und die vollstetige Hülle ist die zugehörige Hüllenoperation $\Phi^* \circ \Phi$. Die Behauptung folgt somit aus Proposition 5.2.19. □

Für stetige Abbildungen $f, h\colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen gilt

$$\overrightarrow{h} = \overrightarrow{f} \quad\Longleftrightarrow\quad \overleftrightarrows{f} = \overleftrightarrows{h} \quad\Longleftrightarrow\quad \gamma_D \circ h = \gamma_D \circ f.$$

Ist C superalgebraisch und D vollständig, so erhält man die vollstetige Hülle einer stetigen, residuierten Abbildung $f\colon C \to D$ also auch durch

$$\overline{f} = \max\{\, h \in \mathsf{cres}(C; D) : \gamma_D \circ h = \gamma_D \circ f \,\}.$$

Außerdem ist $\overline{f} = \bigvee_{\mathsf{cres}(C;D)}\{\, h \in \mathsf{cres}(C;D) : \overrightarrow{h} = \overrightarrow{f}\,\}$, d. h. es gilt

$$\overline{f}(x) = \bigvee_D\{\, h(x) : h \in \mathsf{cres}(C;D) \;\&\; \overrightarrow{h} = \overrightarrow{f}\,\}.$$

Aus Theorem 5.2.20 folgt insbesondere, dass sich die Menge der vollstetigen, residuierten Abbildungen zwischen C und D als Hüllenbereich bezüglich der vollstetigen Hülle $f \mapsto \overline{f}$ ergibt.

Korollar 5.2.21. *Sei C eine superalgebraische und D eine vollständige Hüllenstruktur. Es ist*

$$\mathsf{ccres}(C;D) = \mathsf{cres}(C;D)_\gamma,$$

d. h. die punktweise geordnete Menge $\mathsf{ccres}(C;D)$ aller vollstetigen, residuierten Abbildungen von C in D ist der Hüllenbereich der vollstetigen Hülle auf $\mathsf{cres}(C;D)$.

Als Hüllenbereich einer vollständigen Hüllenstruktur ist $\mathsf{ccres}(C;D)$ selbst ein vollständiger Verband, in dem Suprema folgendermaßen gebildet werden:

$$\bigvee_{\mathsf{ccres}(C;D)} \mathcal{F} = \overline{\bigvee_{\mathsf{cres}(C;D)} \mathcal{F}} \qquad (\mathcal{F} \subseteq \mathsf{ccres}(C;D)).$$

Beweis. Nach Theorem 5.2.20 und Lemma 5.2.7, siehe außerdem Proposition 1.2.30. □

Jetzt kommen wir zur angekündigten bijektiven Korrespondenz für residuierte Abbildungen zwischen Hüllenbereichen:

Theorem 5.2.22. *Sei C eine superalgebraische und D eine vollständige Hüllenstruktur. Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{ccres}(C;D)$ *aller vollstetigen, residuierten Abbildungen von C nach D und*
- $\mathsf{res}(C_\gamma;D_\gamma)$ *aller residuierten Abbildungen von C_γ nach D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Operatoren

$$f \mapsto \overrightarrow{f} \quad \textit{und} \quad \varphi \mapsto \overleftarrow{\widetilde{\varphi}}.$$

Beweis. Dies folgt aus Theorem 5.2.16 und Korollar 5.2.21 (siehe Theorem 1.2.41). □

Ist C eine superalgebraische und D eine vollständige Hüllenstruktur, so ist die Menge $\mathsf{ccres}(C;D)$ der vollstetigen, residuierten Abbildungen von C in D wegen der obigen Bijektion also *minimal* unter allen Teilmengen von $\mathsf{cres}(C;D)$, deren Elemente vermöge der kanonischen Zuordnung $f \mapsto \overrightarrow{f}$ sämtliche residuierten Abbildungen zwischen den Hüllenbereichen C_γ und D_γ liefern.

Das folgende Beispiel beantwortet die interessante Frage, wie sich die superalgebraischen Hüllenstrukturen beschreiben lassen, deren Supremum-Abbildungen vollstetig sind.

Beispiel 5.2.23. Sei C eine superalgebraische Hüllenstruktur. Nach Beispiel 5.2.5 sind alle Supremum-Abbildungen $\bigvee_C : C^I \to C$ (wobei I eine Indexmenge ist) sowohl residuiert als auch stetig, und die Supremum-Abbildungen $\bigvee_{C_\gamma} : (C_\gamma)^I \to C_\gamma$ des Hüllenbereichs (es ist $(C_\gamma)^I = (C^I)_\gamma$) entstehen durch

$$\bigvee_{C_\gamma} = \overrightarrow{\bigvee_C}.$$

Da mit C auch die Hüllenstruktur C^I superalgebraisch ist (siehe Lemma 3.1.14), liegt die Frage nahe, wann die Supremum-Abbildungen von C sogar *vollstetig* sind. Sie sind dies genau dann, wenn die Hüllenstruktur C *diskret* ist, d. h.

$$\gamma_C(u) = u \quad \text{für alle } u \in \mathcal{S}C \tag{5.2}$$

gilt. Denn die $\bigvee$-primen Elemente von C^I sind von der Form $\bot_{C^I}[i \mapsto u]$ mit $u \in \mathcal{S}C$, und ihr Supremum ist jeweils gerade u. Die für die Vollstetigkeit aller I-stelligen Supremum-Abbildungen $\bigvee_C$ erforderlichen Identitäten

$$(\gamma_C \circ \textstyle\bigvee_C)(\bot_{C^I}[i \mapsto u]) = \textstyle\bigvee_C(\bot_{C^I}[i \mapsto u]) \qquad (u \in \mathcal{S}C)$$

entsprechen somit der Bedingung (5.2).

Abschließend widmen wir uns noch dem speziellen Fall vollstetiger, residuierter Abbildungen zwischen *residuierten* Hüllenstrukturen. Ist C eine superalgebraische und D eine residuierte, vollständige Hüllenstruktur, so ist mit $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ auch die Abbildung $\overleftarrow{\varphi}\colon C \to D$ residuiert (siehe Lemma 5.2.11), also

$$\overleftarrow{\tilde{\varphi}} = \overleftarrow{\varphi}.$$

Für ein vollstetiges, residuiertes $f\colon C \to D$ folgt daraus $f = \overline{f} = \overleftarrow{\overrightarrow{\tilde{f}}} = \overleftarrow{\overrightarrow{f}}$ und somit das nächste Lemma.

Proposition 5.2.24. *Seien C, D vollständige Hüllenstrukturen, C superalgebraisch und D* residuiert*. Dann gilt für jede residuierte Abbildung $f\colon C \to D$*

$$f \text{ vollstetig} \iff f \text{ bindend},$$

Ist f stetig, so folgt außerdem

$$\overline{f} = \overleftarrow{\overrightarrow{f}} = \gamma_D \circ f,$$

die vollstetige Hülle von f ist in diesem Fall also die kleinste isotone und bindende Abbildung über f (siehe Bemerkung 4.3.3). □

Lemma 5.2.25. *Für jede* residuierte*, superalgebraische Hüllenstruktur C ist*

$$\overline{\mathrm{id}_C} = \overline{\gamma_C} = \gamma_C.$$

Beweis. $\overline{\mathrm{id}_C} = \overline{\gamma_C}$ gilt bereits für beliebige superalgebraische Hüllenstrukturen C, und $\overline{\gamma_C} = \gamma_C$ ergibt sich, da γ_C bindend ist. □

5.2.3 Das Quantaloid der vollstetigen, residuierten Abbildungen

Wir wissen, dass die vollständigen Verbände genau die Hüllenbereiche superalgebraischer Hüllenstrukturen sind, und haben darüber hinaus gesehen, dass die vollstetigen, residuierten Abbildungen zwischen superalgebraischen Hüllenstrukturen bijektiv mit den residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen vollständigen Hüllenbereichen korrespondieren. Es ist naheliegend, diese Feststellungen zu einer kategoriellen Äquivalenz auszubauen. Zu diesem Zweck führen wir zunächst einige Kategorien ein, deren Morphismen stetige und residuierte Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen sind.

Die übliche Komposition stetiger, residuierter Abbildungen ist bekanntlich wieder stetig und residuiert, und auch jede identische Abbildung ist stetig und residuiert.

Definition 5.2.26 (Kategorien stetiger, residuierter Abbildungen)**.** Es sei CS^c die Kategorie der Hüllenstrukturen und stetigen, residuierten Abbildungen (mit der üblichen Komposition $\circ$ und den Identitäten id_C).

Die folgende Tabelle enthält die Bezeichnungen einiger voller Unterkategorien von CS^c zusammen mit ihren Objekten.

Bezeichnung	Objekte
CCS^c	vollständige Hüllenstrukturen
ACS^c	superalgebraische Hüllenstrukturen
$\mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{A}}$	monotone Hüllenstrukturen
$\mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{P}}$	klassische Hüllenstrukturen

Die Kategorie CCS^c der vollständigen Hüllenstrukturen und stetigen, residuierten Abbildungen wird in [36] ausführlich behandelt.

Mit der punktweisen Ordnung der Morphismen ist CS^c offensichtlich eine lokal geordnete 2-Kategorie. Beschränkt man die Objekte auf vollständige Hüllenstrukturen, erhält man sogar Quantaloide:

Lemma 5.2.27. *Die Kategorie CCS^c ist mit der punktweisen Ordnung von Funktionen ein Quantaloid, und die Suprema in den vollständigen Verbänden $\mathsf{CCS}^c(C, D) = \mathsf{cres}(C; D)$ werden punktweise gebildet. Als volle Unterkategorien von CCS^c sind auch ACS^c, $\mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{A}}$ und $\mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{P}}$ Quantaloide.*

Beweis. Nach Lemma 5.2.7 überträgt sich die Quantaloid-Struktur von SL auf CCS^c (siehe Beispiel 2.3.27). □

Definition 5.2.28 (Kategorien abgeschlossener, dual residuierter Abbildungen)**.** Es sei CS^{cld} die lokal geordnete 2-Kategorie der Hüllenstrukturen und abgeschlossenen, dual residuierten Abbildungen (mit der üblichen Komposition $\circ$ und den Identitäten id_C), und CCS^{cld} sei ihre volle Unterkategorie der vollständigen Hüllenstrukturen.

In den vollständigen Verbänden $\mathsf{CCS}^{cld}(C, D) = \mathsf{clres}_{(-;-)}(C; D)$ werden die Infima punktweise gebildet (siehe die Propositionen 2.2.28 und 4.2.29).

Bemerkung 5.2.29. Da eine residuierte Abbildung f zwischen Hüllenstrukturen genau dann stetig ist, wenn ihre obere Adjungierte abgeschlossen ist (Theorem 5.2.2), induziert $f \mapsto f^*$ zusammen mit der identischen Funktion auf der Objektklasse nach Proposition 2.1.15 einen 2-Isomorphismus

$$\mathsf{CS}^c \cong (\mathsf{CS}^{cld})^{\mathrm{co\,op}}.$$

Ebenso sind die Quantaloide CCS^c und $(\mathsf{CCS}^{cld})^{\mathrm{co\,op}}$ isomorph.

Obwohl abgeschlossene, dual residuierte Abbildungen als Morphismen eine ebenbürtige Rolle spielen, werden wir uns im folgenden auf die Betrachtung von Kategorien mit stetigen, residuierten Abbildungen beschränken.

Um eine kategorielle Äquivalenz mit der Kategorie SL der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen zu erhalten, wählen wir nicht alle stetigen, sondern nur die vollstetigen residuierten Abbildungen als Morphismen zwischen superalgebraischen Hüllenstrukturen. Allerdings ist noch nicht klar, mit welcher Komposition sich auf diese Weise eine Kategorie bilden lässt (die gewöhnliche Verknüpfung vollstetiger Abbildungen muss nicht wieder vollstetig sein). Das klärt die folgende Proposition, derzufolge die vollstetige Hülle $f \mapsto \overline{f}$ einen quantaloidalen Nukleus auf dem Quantaloid ACS^c induziert (siehe Definition 4.3.13). Damit können wir Theorem 4.3.15 zur Konstruktion der gewünschten Kategorie verwenden.

Proposition 5.2.30. *Für alle superalgebraischen Hüllenstrukturen C, D, E ist die gewöhnliche Komposition*

$$\circ = \circ_{CDE} \colon \mathsf{ACS}^c(D,E) \times \mathsf{ACS}^c(C,D) \to \mathsf{ACS}^c(C,E)$$

stetig bezüglich der vollstetigen Hülle, d. h. für stetige, residuierte Funktionen $f \colon C \to D$, $g \colon D \to E$ gilt

$$\overline{\overline{g} \circ \overline{f}} = \overline{g \circ f}.$$

Dies ist bekanntlich gleichbedeutend mit der Stetigkeit der Komposition in jeder Koordinate, also $\overline{g \circ \overline{f}} = \overline{g \circ f} = \overline{\overline{g} \circ f}$, und auch mit der schwachen Stetigkeit $\overline{g} \circ \overline{f} \leq \overline{g \circ f}$.

Die vollstetige Hülle induziert somit einen Nukleus

$$N \colon \mathsf{ACS}^c \to \mathsf{ACS}^c,$$

das heißt, die Hüllenoperationen $N_{CD} \colon \mathsf{ACS}^c(C,D) \to \mathsf{ACS}^c(C,D)$ sind durch die vollstetige Hülle auf $\mathsf{ACS}^c(C,D) = \mathsf{cres}(C;D)$ gegeben:

$$N_{CD}(f) = \overline{f}.$$

Beweis. Mit Lemma 4.2.9 und Proposition 5.2.18 ergibt sich

$$\overrightarrow{\overline{g} \circ \overline{f}} = \overrightarrow{\overline{g}} \circ \overrightarrow{\overline{f}} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{g \circ f},$$

nach Definition der vollstetigen Hülle also $\overline{\overline{g} \circ \overline{f}} = \overline{g \circ f}$. □

Definition 5.2.31 (Quantaloide vollstetiger, residuierter Abbildungen)**.** Das Quantaloid ACS der *superalgebraischen Hüllenstrukturen und vollstetigen, residuierten Abbildungen* sei mit dem durch die vollstetige Hülle induzierten Nukleus N aus Proposition 5.2.30 definiert durch

$$\mathsf{ACS} := (\mathsf{ACS}^c)_N,$$

vergleiche Theorem 4.3.15 für die Details dieser Konstruktion. Die geordneten Morphismenmengen von ACS sind damit die in Korollar 5.2.21 beschriebenen vollständigen Verbände

$$\mathsf{ACS}(C,D) = \mathsf{ccres}(C;D).$$

Die Komposition $\odot$ in ACS ist gegeben durch $\odot_{CDE} = \overrightarrow{\circ_{CDE}}$, also

$$g \odot f = \overline{g \circ f},$$

und die Identitäten durch $i_C = \overrightarrow{\mathrm{id}_C}$, also

$$i_C = \overline{\mathrm{id}_C} = \overline{\gamma_C}.$$

$\mathsf{ACS}_{\mathfrak{A}}$ und $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ bezeichnen die vollen Unterkategorien der *monotonen* bzw. *klassischen* Hüllenstrukturen von ACS. Auch $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{A}}$ und $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ sind Quantaloide.

Nach Definition ist die Co-Restriktion $N^\bullet\colon \mathsf{ACS}^c \to \mathsf{ACS}$ des durch die vollstetige Hülle induzierten Nukleus N ein Quantaloid-Homomorphismus (siehe Theorem 4.3.15).

Ohne Beweis sei kurz erwähnt, dass nicht nur hinsichtlich des Quantaloids CCS^c, sondern auch hinsichtlich des abgeleiteten Quantaloids ACS die bisher betrachteten Produkte vollständiger bzw. superalgebraischer Hüllenstrukturen tatsächlich Produkte im kategoriellen Sinne sind:

Proposition 5.2.32. *Sei $C = (\, C_i : i \in I\,)$ eine Familie vollständiger Hüllenstrukturen.*

(a) Mit den üblichen Projektionsabbildungen $\pi_j\colon \prod C \to C_j$ ist $(\prod C, (\pi_i)_{i\in I})$ ein kategorielles Produkt von C in der Kategorie CCS^c und auch in der Kategorie CCS^{cld}.

(b) Sind alle Hüllenstrukturen C_i superalgebraisch, so erhält man mit den vollstetigen Hüllen der üblichen Projektionsabbildungen durch $(\prod C, (\overline{\pi_i})_{i\in I})$ ein kategorielles Produkt von C in ACS. □

Mit dem Quantaloid ACS der superalgebraischen Hüllenstrukturen und vollstetigen, residuierten Abbildungen erhalten wir nun die gewünschte Äquivalenz zum Quantaloid SL der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen, indem wir die früheren Resultate zu Hüllenstrukturen und vollstetigen Abbildungen ausnutzen. Zunächst gilt für alle $f \in \mathsf{ACS}(C, D)$, $g \in \mathsf{ACS}(D, E)$ (siehe Proposition 5.2.18 und Lemma 4.2.9)

$$\overrightarrow{g \odot f} = \overrightarrow{\overline{g \circ f}} = \overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{i_C} = \overrightarrow{\overline{\mathrm{id}_C}} = \overrightarrow{\mathrm{id}_C} = \mathrm{id}_{C_\gamma}.$$

Damit ergibt sich der folgende Funktor:

Definition 5.2.33 (Hüllenbereichsfunktor)**.** Der *Hüllenbereichsfunktor* $\mathfrak{L}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{SL}$ wird festgelegt durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(C) &= C_\gamma && \text{für alle } C \in |\mathsf{ACS}|, \\ \mathfrak{L}(f) &= \overrightarrow{f} && \text{für alle } f \in \mathsf{ACS}(C, D). \end{aligned}$$

Theorem 5.2.34. *Der Hüllenbereichsfunktor $\mathfrak{L}$ ist eine Quantaloid-Äquivalenz, und die Quantaloide ACS und SL sind demnach äquivalent.*

Beweis. Nach Theorem 5.2.22 ist der Funktor $\mathfrak{L}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{SL}$ voll und treu, und nach Proposition 4.1.14 ist $\mathfrak{L}$ auch wesentlich surjektiv, denn für jeden vollständigen Verband L ist $C := (\mathfrak{P}|L|, \Delta_L)$ eine superalgebraische Hüllenstruktur, deren Hüllenbereich $\mathfrak{L}(C) = \mathfrak{N}L = (\{\, {\downarrow_L} x : x \in L\,\}, \subseteq)$ isomorph zu L ist. Dies zeigt insgesamt, dass $\mathfrak{L}$ eine kategorielle Äquivalenz ist.

Für den Nachweis, dass $\mathfrak{L}$ auch eine Quantaloid-Äquivalenz ist, genügt es nach Korollar 2.3.24 und Proposition 2.3.8 zu zeigen, dass die Abbildungen $\mathfrak{L}_{CD}$ Ordnungsisomorphismen sind. Auch dies ist in Theorem 5.2.22 bereits geschehen. □

Man beachte, dass der Isomorphie-Begriff der Kategorie ACS auf recht große Isomorphieklassen führt:

Bemerkung 5.2.35. Jede Äquivalenz von Kategorien bewahrt und reflektiert Isomorphismen. Aus der Äquivalenz $\mathfrak{L}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{SL}$ ergibt sich also, dass zwei superalgebraische Hüllenstrukturen genau dann in ACS isomorph sind, wenn sie ordnungsisomorphe Hüllenbereiche besitzen!

Durch die Einschränkung der Morphismen von ACS auf die *adjungierten* folgt aus der obigen Quantaloid-Äquivalenz sofort eine weitere Äquivalenz von lokal geordneten 2-Kategorien.

Korollar 5.2.36. *Durch (Co-)Restriktion des Hüllenbereichsfunktors $\mathfrak{L}$ entsteht eine* 2*-Äquivalenz der lokal geordneten* 2*-Kategorien* $\mathrm{Adj}(\mathsf{ACS})$ *und* $\mathsf{CL} = \mathrm{Adj}(\mathsf{SL})$.

Beweis. Nach Theorem 5.2.34 mit Lemma 2.3.14, siehe auch Beispiel 2.3.17. □

Die Kategorie der vollständigen Verbände und *vollständigen Homomorphismen* ist somit äquivalent zur Kategorie der superalgebraischen Hüllenstrukturen und *adjungierten vollstetigen, residuierten Abbildungen.* Diese Morphismen wollen wir noch etwas näher beschreiben.

Vorbereitend betrachten wir dafür die beiden Ungleichungen $\mathrm{id}_P \leq \psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi \leq \mathrm{id}_Q$ aus der Definition einer ordnungstheoretischen Adjunktion (φ, ψ) zwischen geordneten Mengen P und Q.

Lemma 5.2.37. *Seien P, Q geordnete Mengen, $\varphi\colon P \to Q$ residuiert und $\psi\colon Q \to P$ isoton. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_P \leq \psi \circ \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi^* \leq \psi, \\ \varphi \circ \psi \leq \mathrm{id}_Q \quad &\Longleftrightarrow \quad \psi \leq \varphi^*. \end{aligned}$$

Beweis. Zur ersten Äquivalenz. „$\Rightarrow$“: Aus $\mathrm{id}_P \leq \psi \circ \varphi$ folgt $\varphi^* = \mathrm{id}_P \circ \varphi^* \leq \psi \circ \varphi \circ \varphi^* \leq \psi \circ \mathrm{id}_Q = \psi$, da ψ isoton ist. „$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung ist $\mathrm{id}_P \leq \varphi^* \circ \varphi \leq \psi \circ \varphi$.

Zur zweiten Äquivalenz. „$\Rightarrow$“: Aus $\varphi \circ \psi \leq \mathrm{id}_Q$ folgt $\psi = \mathrm{id}_P \circ \psi \leq \varphi^* \circ \varphi \circ \psi \leq \varphi^* \circ \mathrm{id}_Q = \varphi^*$. „$\Leftarrow$“: Mit $\psi \leq \varphi^*$ gilt auch $\varphi \circ \psi \leq \varphi \circ \varphi^* \leq \mathrm{id}_Q$. □

Ist also $\psi\colon M \to L$ eine residuierte Abbildung zwischen vollständigen Verbänden, so folgt aus dem obigen Lemma, dass die beiden Bedingungen für die Adjungiertheit von ψ im Quantaloid SL (siehe Definition 2.3.9) zu einer Ungleichung der Form $\psi \leq \varphi^*$ bzw. $\varphi^* \leq \psi$ für ein geeignetes $\varphi \in \mathsf{SL}(L, M)$ äquivalent sind. In [22] wird bemerkt, dass solche Ungleichungen in der Notation $\Diamond \leq \Box$ und $\Box \leq \Diamond$ auch in der Sahlqvist-Theorie der Modallogik auftreten.

Adjungierte Morphismen $f \in \mathsf{ACS}(C, D)$ sind definitionsgemäß diejenigen Abbildungen, für die ein $g \in \mathsf{ACS}(D, C)$ existiert mit $g \dashv f$, d. h.

$$i_D \leq f \odot g, \qquad g \odot f \leq i_C.$$

Diese beiden Bedingungen für die Adjungiertheit in ACS lassen sich nun folgendermaßen charakterisieren:

Lemma 5.2.38. *Seien C, D superalgebraische Hüllenstrukturen und $f \in \mathsf{ACS}(C, D)$, $g \in \mathsf{ACS}(D, C)$.*

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(1) $i_D \leq f \odot g$, *(2)* $\mathrm{id}_D \leq \overline{f \circ g}$, *(3)* $\mathrm{id}_D \leq \gamma_D \circ f \circ g$, *(4)* $\mathrm{id}_{D_\gamma} \leq \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$,
(5) $(\overrightarrow{g})^* \leq \overrightarrow{f}$.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(1) $g \odot f \leq i_C$, *(2)* $g \circ f \leq \overline{\mathrm{id}_C}$, *(3)* $g \circ f \leq \gamma_C$, *(4)* $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \leq \mathrm{id}_{C_\gamma}$,
(5) $\overrightarrow{f} \leq (\overrightarrow{g})^*$.

In den Aussagen (1)–(4) genügt es jeweils, die Ungleichung auf eine $\bigvee$-dichte Teilmenge zu beschränken.

Beweis. Zu (a). (1) $\Leftrightarrow$ (2) ist klar wegen $\mathrm{id}_D \leq \overline{\mathrm{id}_D} = i_D$. (1) $\Rightarrow$ (4) gilt aufgrund von $\overrightarrow{i_D} = \mathrm{id}_{D_\gamma}$ und $\overrightarrow{f \odot g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$. (4) $\Rightarrow$ (3): Wegen der Stetigkeit von f und g ist

$$\overleftarrow{\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}} = \gamma_Q \circ f \circ g.$$

(3) $\Rightarrow$ (2) folgt mit $(\gamma_Q \circ f \circ g)^\sim = \overline{f \circ g}$. (4) $\Leftrightarrow$ (5) gilt schließlich nach Lemma 5.2.37. Zu (b). Dies zeigt man ganz ähnlich wie Teil (a). $\square$

Korollar 5.2.39. *Für alle $f \in \mathsf{ACS}(C, D)$, $g \in \mathsf{ACS}(D, C)$ gilt*

$$g \dashv f \ \textit{in}\ \mathsf{ACS} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{g} \dashv \overrightarrow{f} \ \textit{in}\ \mathsf{SL} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{f} = (\overrightarrow{g})^*,$$

und aus jeder dieser äquivalenten Bedingungen folgt

$$g = \widetilde{\overleftarrow{(\overrightarrow{f})_*}} \quad \textit{und} \quad f = \widetilde{\overleftarrow{\overrightarrow{g^*}}} = (g^* \circ \gamma_P)^\sim.$$

Beweis. Die angegebenen Äquivalenzen folgen aus Lemma 5.2.38 (oder alternativ aus der Beschreibung adjungierter Morphismen in SL und der Tatsache, dass 2-Funktoren adjungierte Paare bewahren). Aus $\overrightarrow{f} = (\overrightarrow{g})^*$ erhält man

$$\overrightarrow{g} = (\overrightarrow{f})_* \quad \text{und} \quad \overrightarrow{f} = \overrightarrow{g^*}$$

und somit auch die angegebene Berechnung von f und g (wegen der Stetigkeit von g ist g^* abgeschlossen). $\square$

Eine weitere Charakterisierung adjungierter vollstetiger, residuierter Abbildungen liefert abschließend das folgende Lemma.

Lemma 5.2.40. *Ein Morphismus $f \in \mathsf{ACS}(C, D)$ ist genau dann in ACS adjungiert, wenn für alle $A \subseteq C$ gilt:*

$$(\gamma_D \circ f)(\textstyle\bigwedge_C \gamma_C[A]) = \textstyle\bigwedge_D (\gamma_D \circ f)[A].$$

Beweis. Die Adjungiertheit von $f \in \mathsf{ACS}(P, Q)$ ist äquivalent dazu, dass $\overrightarrow{f}$ dual residuiert ist, also

$$\overrightarrow{f}(\textstyle\bigwedge_{P_\gamma} C) = \textstyle\bigwedge_{Q_\gamma} \overrightarrow{f}[C]$$

für alle $C \subseteq P_\gamma$ erfüllt. $\square$

5.2.4 Galois-Abbildungen

Wir setzen die Untersuchung $(\sigma; \tau)$-residuierter Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen fort und wenden uns als nächstes dem Fall $(\sigma; \tau) = (+; -)$, also einstelligen Galois-Abbildungen zu. Hier werden die bindenden Abbildungen (und bei superalgebraischen Hüllenstrukturen auch die vollstetigen) eine zentrale Rolle spielen.

Genauso wie für Adjunktionen hängen die Begriffe innenbindend und außenbindend auch über Galois-Verbindungen zusammen:

Proposition 5.2.41. *Seien C, D Hüllenstrukturen, und sei (f, g) eine Galois-Verbindung zwischen C und D. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist innenbindend.

(2) g ist außenbindend.

(3) Es gibt einen $\bigvee$-Erzeuger J von D mit $\gamma_C \circ g \restriction J = g \restriction J$.

(4) $\gamma_C \leq g \circ f$.

(5) $g \circ f$ ist bindend (bzw. innenbindend bzw. außenbindend).

(6) $(g \circ f)[C] \subseteq C_\gamma$.

Beweis. Dies folgt durch Dualisierung ($(D_\leq)^{\mathrm{op}}$ statt $D_\leq$) aus Theorem 5.2.8, da in dessen Beweis von der Hüllenoperation γ_D keinerlei Gebrauch gemacht wird. □

Da mit (f, g) auch (g, f) eine Galois-Verbindung ist, erhält man aus der vorigen Proposition deutlich mehr nützliche Folgerungen als im vergleichbaren Fall für Adjunktionen (vergleiche Korollar 5.2.9).

Theorem 5.2.42. *Sei (f, g) eine Galois-Verbindung zwischen Hüllenstrukturen C und D. Es sind äquivalent:*

(1) f ist bindend.

(2) g ist bindend.

(3) f und g sind außenbindend.

(4) f und g sind innenbindend.

(5) $\gamma_C \leq g \circ f$ und $\gamma_D \leq f \circ g$.

(6) $g \circ f$ und $f \circ g$ sind bindend (bzw. innenbindend bzw. außenbindend).

(7) Es gibt $\bigvee$-Erzeuger J von C und K von D mit

$$\gamma_D \circ f \restriction J = f \restriction J \quad \textit{und} \quad \gamma_C \circ g \restriction K = g \restriction K.$$

Beweis. Eine Abbildung zwischen Hüllenstrukturen ist genau dann bindend, wenn sie innenbindend und außenbindend ist. Aus Proposition 5.2.41 folgen somit alle angegebenen Äquivalenzen. □

Definition 5.2.43 (Bindende Galois-Verbindungen)**.** Eine Galois-Verbindung (f, g) zwischen Hüllenstrukturen wird *bindend* genannt, falls f bindend ist, d. h. falls die äquivalenten Bedingungen aus Theorem 5.2.42 erfüllt sind.

Das folgende Theorem zur Relativierung von Galois-Verbindungen zwischen Hüllenstrukturen auf Hüllenbereiche ist – in dualer Form und natürlich in einer anderen Terminologie – bereits aus [38, Proposition 6] bekannt.

Theorem 5.2.44. *Seien C und D Hüllenstrukturen.*

(a) Sei (f, g) eine bindende *Galois-Verbindung zwischen C und D. Dann ist*

$$(\varphi, \psi) := (\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$$

eine Galois-Verbindung zwischen C_γ und D_γ. Außerdem kommutiert das in Abbildung 5.3 dargestellte Diagramm, wobei $\tilde{C}$ sowohl der Hüllenbereich zur Hüllenoperation $g \circ f$ als auch der zur Hüllenoperation $\psi \circ \varphi$ ist und ebenso $\tilde{D}$ der Hüllenbereich zu $f \circ g$ und zu $\varphi \circ \psi$. Insbesondere sind auch die dualen Isomorphismen $\tilde{f}\colon x \mapsto f(x)$ und $\tilde{\varphi}\colon x \mapsto \varphi(x)$ von $\tilde{C}$ in $\tilde{D}$ identisch, und dasselbe gilt für die durch g und ψ induzierten kanonischen dualen Isomorphismen $\tilde{g}$ und $\tilde{\psi}$.

(b) Für jede Galois-Verbindung (φ, ψ) zwischen C_γ und D_γ ist umgekehrt

$$(f, g) := (\overleftarrow{\varphi}, \overleftarrow{\psi})$$

eine bindende *Galois-Verbindung zwischen C und D.*

Auf diese Weise erhält man eine bijektive Korrespondenz von allen bindenden Galois-Verbindungen zwischen den Hüllenstrukturen C und D mit allen Galois-Verbindungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen C_γ und D_γ.

Beweis. Zu (a). Zunächst gilt für alle Abbildungen $f\colon C \to D$ und $g\colon D \to C$

$$(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}) \text{ Galois-Verbindung} \quad \Longleftrightarrow \quad (\overset{\leftrightarrows}{f}, \overset{\leftrightarrows}{g}) \text{ Galois-Verbindung,}$$

denn man berechnet

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{C_\gamma} \leq \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \gamma_C^{\bullet} \circ g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C^{\circ} \quad &\Longleftrightarrow \quad \gamma_C \leq \gamma_C \circ g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{id}_C \leq \overset{\leftrightarrows}{g} \circ \overset{\leftrightarrows}{f} \end{aligned}$$

und analog $\mathrm{id}_{D_\gamma} \leq \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} \Leftrightarrow \mathrm{id}_D \leq \overset{\leftrightarrows}{f} \circ \overset{\leftrightarrows}{g}$. Ist nun (f, g) eine bindende Galois-Verbindung, so folgt

$$(\overset{\leftrightarrows}{f}, \overset{\leftrightarrows}{g}) = (f, g)$$

(siehe Proposition 4.2.7), und somit ist auch $(\varphi, \psi) := (\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ eine Galois-Verbindung.

Sei $\tilde{C}$ der Hüllenbereich zu $g \circ f$. Nach Theorem 1.2.41 (geeignet dualisiert) ist dann $(g \circ f)[C] = g[D] = |\tilde{C}|$, und da g bindend ist, erhält man auch

$$(\psi \circ \varphi)[C_\gamma] = \psi[D_\gamma] = \overrightarrow{g}[D_\gamma] = (\gamma_C \circ g \circ \gamma_D)[D] = g[D] = |\tilde{C}|.$$

Analog sieht man, dass der Hüllenbereich $\tilde{D}$ zu $f \circ g$ auch derjenige zu $\varphi \circ \psi$ ist. Da f bindend ist, sind $\tilde{f}$ und $\tilde{\varphi}$ identisch, analog ergibt sich $\tilde{g} = \tilde{\psi}$.

Zu (b). Sei (φ, ψ) eine beliebige Galois-Verbindung zwischen C_γ und D_γ. Die Abbildungen $\overleftarrow{\varphi}$ und $\overleftarrow{\psi}$ sind stets bindend. Wegen $\mathrm{id}_{C_\gamma} \leq \psi \circ \varphi$ gilt außerdem

$$\mathrm{id}_C \leq \gamma_C = \gamma_C^{\circ} \circ \mathrm{id}_{C_\gamma} \circ \gamma_C^{\bullet} \leq \gamma_C^{\circ} \circ \psi \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \gamma_C^{\circ} \circ \psi \circ \gamma_D^{\bullet} \circ \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet} = \overleftarrow{\psi} \circ \overleftarrow{\varphi}$$

und analog $\mathrm{id}_D \leq \overleftarrow{\varphi} \circ \overleftarrow{\psi}$ wegen $\mathrm{id}_{D_\gamma} \leq \varphi \circ \psi$. Also ist $(\overleftarrow{\varphi}, \overleftarrow{\psi})$ eine Galois-Verbindung.

Da Galois-Verbindungen durch die Pfeil-Operatoren bewahrt werden, ergibt sich die bijektive Korrespondenz nach Proposition 4.2.7. $\square$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rrr, shift right, "f"'] \arrow[dr, shift left, "\gamma_C^{\circ}"] \arrow[dd, shift right, "(g\circ f)^{\bullet}"'] & & & D \arrow[lll, shift right, "g"'] \arrow[dl, shift left, "\gamma_D^{\bullet}"'] \arrow[dd, shift left, "(f\circ g)^{\circ}"] \\
& C_\gamma \arrow[r, shift right, "\varphi"'] \arrow[ul, shift left, "\gamma_C^{\bullet}"] \arrow[dl, shift left, "(\psi\circ\varphi)^{\circ}"] & D_\gamma \arrow[l, shift right, "\psi"'] \arrow[ur, shift left, "\gamma_D^{\circ}"] \arrow[dr, shift left, "(\varphi\circ\psi)^{\bullet}"'] & \\
\tilde{C} \arrow[rrr, shift right, "\tilde{f}=\tilde{\varphi}"'] \arrow[uu, shift right, "(g\circ f)^{\circ}"'] \arrow[ur, shift left, "(\psi\circ\varphi)^{\bullet}"] & & & \tilde{D} \arrow[lll, shift right, "\tilde{g}=\tilde{\psi}"'] \arrow[uu, shift left, "(f\circ g)^{\bullet}"] \arrow[ul, shift left, "(\varphi\circ\psi)^{\circ}"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 5.3: Induzierte Galois-Verbindungen aus Theorem 5.2.44

Für jede bindende Galois-Abbildung $f\colon C \to D$ gilt somit

$$(\overrightarrow{f})^*_{(+;-)} = \overrightarrow{f^*_{(+;-)}}.$$

Als weitere Folgerung aus Theorem 5.2.44 erhalten wir unmittelbar die bijektive Korrespondenz von bindenden Galois-Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen mit Galois-Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen. Im Unterschied zum entsprechenden Resultat für vollstetige, residuierte Abbildungen müssen die betrachteten Hüllenstrukturen hierbei in keiner Weise (etwa auf die superalgebraischen) eingeschränkt werden.

Korollar 5.2.45. *Seien C, D beliebige Hüllenstrukturen. Die geordneten Mengen*

- $\mathsf{bres}_{(+;-)}(C;D)$ *aller bindenden Galois-Abbildungen von C nach D und*
- $\mathsf{res}_{(+;-)}(C_\gamma;D_\gamma)$ *aller Galois-Abbildungen von C_γ nach D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen

$$f \mapsto \overrightarrow{f} \quad \textit{und} \quad \varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}.$$

Beweis. Nach Theorem 5.2.44. □

Unter der speziellen Voraussetzung, dass C eine residuierte und D eine residuale Hüllenstruktur ist, wird bereits durch jede Galois-Abbildung $f\colon C \to D$ eine Galois-Abbildung $\overrightarrow{f} = \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ}$ kanonisch induziert (vergleiche Proposition 4.1.8).

Sind C und D beliebige *vollständige* Hüllenstrukturen, so ist $\mathsf{bres}_{(+;-)}(C;D)$ ein vollständiger Verband, in dem Infima punktweise gebildet werden (siehe Propositionen 2.2.28 und 4.2.29). Zu jeder Galois-Abbildung $f\colon C \to D$ gibt es somit eine kleinste bindende Galois-Abbildung $g\colon C \to D$ mit $f \le g$ (die *bindende Hülle von f*), und es ist

$$g(x) = \bigwedge\nolimits_D \{\, h(x) : f \le h \in \mathsf{bres}_{(+;-)}(C;D) \,\}.$$

Analoges gilt für innenbindende und für außenbindende Galois-Abbildungen. Man beachte, dass sich die bindende Hülle für Galois-Abbildungen wegen der Antitonie deutlich von der in Bemerkung 4.3.3 beschriebenen Situation unterscheidet.

Eine Galois-Abbildung $f\colon C \to D$ zwischen beliebigen Hüllenstrukturen ist nach Korollar 5.2.45 genau dann bindend, wenn eine Galois-Abbildung $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ existiert mit $f = \overleftarrow{\varphi}$ (vergleiche Theorem 4.2.5). Wir stellen noch einige weitere Charakterisierungen bindender Galois-Verbindungen zusammen.

Proposition 5.2.46. *Es sei (f, g) eine Galois-Verbindung zwischen Hüllenstrukturen C und D, und es sei J ein $\bigvee$-Erzeuger von C sowie K ein $\bigvee$-Erzeuger von D. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) (f, g) ist bindend.

(2) $\overrightarrow{f}$ ist eine Galois-Abbildung und $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction J = f \restriction J$.

(3) $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ ist eine Galois-Verbindung, f ist stetig und g ist abgeschlossen.

(4) $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ ist eine Galois-Verbindung mit

$$\gamma_D^\circ \circ \overrightarrow{f} \circ \gamma_C^\bullet \restriction J \geq f \restriction J \quad \text{und} \quad \gamma_C^\circ \circ \overrightarrow{g} \circ \gamma_D^\bullet \restriction K \leq g \restriction K.$$

(5) Es gibt eine Galois-Abbildung $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ mit $\gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet \restriction J = f \restriction J$.

(6) Es gibt eine Galois-Verbindung (φ, ψ) zwischen C_γ und D_γ mit

$$\gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet \restriction J = f \restriction J \quad \text{und} \quad \gamma_C^\circ \circ \psi \circ \gamma_D^\bullet \restriction K = g \restriction K.$$

Darüber hinaus sind φ und ψ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$ und $\psi = \overrightarrow{g}$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (6): Nach Theorem 5.2.44 ist $(\varphi, \psi) = (\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ eine Galois-Verbindung mit den gewünschten Eigenschaften. (6) $\Rightarrow$ (5) ist klar.

Aus $\overleftarrow{\varphi} \restriction J = f \restriction J$ folgt $\overleftarrow{\varphi} = f$, da mit φ auch $\overleftarrow{\varphi}$ eine Galois-Abbildung ist, und man erhält $\varphi = \overrightarrow{f}$. Aus $\overleftarrow{\psi} \restriction K = g \restriction K$ folgert man analog $\psi = \overrightarrow{g}$. Dies zeigt die Eindeutigkeit von φ und ψ sowie die Implikationen (5) $\Rightarrow$ (2) und (6) $\Rightarrow$ (4).

(2) $\Rightarrow$ (1) ergibt sich, weil mit $\overrightarrow{f}$ auch $\overset{\leftrightarrows}{f} = \gamma_D \circ f \gamma_C$ eine Galois-Abbildung ist und aus der Voraussetzung somit $\gamma_D \circ f \gamma_C = f$ folgt.

(4) $\Rightarrow$ (3): Nach Voraussetzung gilt $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \geq f$ und $\gamma_C \circ g \circ \gamma_D \leq g$, was nach Proposition 4.3.11 gleichbedeutend ist mit der Stetigkeit von f und der Abgeschlossenheit von g.

(3) $\Rightarrow$ (1): Da $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ eine Galois-Verbindung und g abgeschlossen ist, gilt nach Theorem 5.2.44

$$\mathrm{id}_C \leq \overset{\leftrightarrows}{g} \circ \overset{\leftrightarrows}{f} = \gamma_C \circ g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C = g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C.$$

Daraus folgt $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \leq f$, da (f, g) eine Galois-Verbindung ist, und f ist somit abgeschlossen. Zusammen mit der Voraussetzung ist f demnach stetig und abgeschlossen, laut Theorem 4.3.12 also bindend. $\square$

Betrachtet man nicht beliebige, sondern superalgebraische Hüllenstrukturen, so sind die Begriffe bindend und vollstetig für Galois-Abbildungen identisch! Unter dieser Voraussetzung ist also die Vollstetigkeit auch für die Signatur $(\sigma;\tau) = (+;-)$ die zentrale Eigenschaft.

Proposition 5.2.47. *Seien C, D Hüllenstrukturen und C superalgebraisch. Für jede Galois-Abbildung $f\colon C \to D$ gilt*

$$f \text{ bindend} \iff f \text{ vollstetig},$$

also $\mathsf{ccres}_{(+;-)}(C;D) = \mathsf{bres}_{(+;-)}(C;D) \cong \mathsf{res}_{(+;-)}(C_\gamma;D_\gamma)$.

Beweis. Mit Theorem 4.3.12 und Proposition 5.2.41 ergibt sich:

$$\begin{aligned} f \text{ bindend} &\iff f \text{ stetig und außenbindend} \\ &\iff f \text{ stetig und } \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}C = f \restriction \mathcal{S}C \\ &\iff f \text{ vollstetig.} \end{aligned}$$

□

5.2.5 Dual residuierte Abbildungen

Die Behandlung des Falls $(\sigma;\tau) = (-;-)$ wurde implizit bereits im Unterabschnitt zu residuierten Abbildungen begonnen, da eine duale Adjunktion (f,g) auch als gewöhnliche Adjunktion (g,f) zwischen denselben geordneten Mengen angesehen werden kann. Wir formulieren einen Teil des Theorems 5.2.2 zu Adjunktionen nochmal unter Betonung der oberen Adjungierten, d. h. für dual residuierte Abbildungen.

Korollar 5.2.48. *Für jede dual residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen und jede $\bigwedge$-dichte Teilmenge M des Hüllenbereichs C_γ sind äquivalent:*

(1) f ist abgeschlossen.

(2) $\gamma_D^\circ \circ \overrightarrow{f} = f \circ \gamma_C^\circ$.

(3) $\gamma_D^\circ \circ \overrightarrow{f} \restriction M = f \circ \gamma_C^\circ \restriction M$.

(4) $\gamma_D \circ f \restriction M \leq f \restriction M$.

(5) $\overrightarrow{f}$ ist dual residuiert und $(\overrightarrow{f})_* = \overrightarrow{f_*}$.

Beweis. Nach Theorem 5.2.2 und Theorem 4.2.5. □

Es stellt sich nun die Frage, wie man – ausgehend von der Zuordnung $f \mapsto \overrightarrow{f}$ – zu einer bijektiven Korrespondenz von geeigneten dual residuierten Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen mit allen dual residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen gelangt. Eine naheliegende Antwort besteht darin, die entsprechenden Resultate für residuierte Abbildungen durch den Übergang $h \mapsto h^*$ zur oberen Adjungierten auf dual residuierte Abbildungen zu übertragen.

Für superalgebraische Hüllenstrukturen C und D sind nach Theorem 5.2.22 die vollständigen Verbände $\mathsf{ccres}(D;C)$ und $\mathsf{res}(D_\gamma;C_\gamma)$ isomorph vermöge $h \mapsto \overrightarrow{h}$. Außerdem entsteht laut Korollar 5.2.3 für jedes (voll-)stetige, residuierte $h\colon D \to C$ die obere Adjungierte der induzierten Abbildung $\overrightarrow{h}$ gerade durch die Induzierte der (abgeschlossenen) oberen Adjungierten von h, d. h. es ist $\overrightarrow{h^*} = (\overrightarrow{h})^*$. Somit ist der vollständige Verband $\mathsf{res}_{(-;-)}(C_\gamma; D_\gamma)$ aller dual residuierten Abbildungen von C_γ in D_γ isomorph zum vollständigen Verband

$$\mathsf{ccres}(D; C)^* := \{\, h^* : h \in \mathsf{ccres}(D; C) \,\} \subseteq \mathsf{clres}_{(-;-)}(C; D)$$

aller oberen Adjungierten von vollstetigen, residuierten Abbildungen von D in C vermöge der zueinander inversen Funktionen

$$f \mapsto \overrightarrow{f} \quad \text{und} \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} := (\overleftarrow{\widetilde{\varphi}_*})^* \qquad (f \in \mathsf{ccres}(D; C)^*,\ \varphi \in \mathsf{res}_{(-;-)}(C_\gamma; D_\gamma)).$$

Für jede Adjunktion (ψ, φ) zwischen C_γ und D_γ ist dann $(\overleftarrow{\widetilde{\psi}}, \widehat{\varphi})$ eine Adjunktion zwischen C und D, und analog zu Theorem 5.2.20 lassen sich die oberen Adjungierten vollstetiger, residuierter Abbildungen folgendermaßen als geeignete abgeschlossene, dual residuierte Abbildungen charakterisieren:

$$\begin{aligned} f \in \mathsf{ccres}(D; C)^* \quad &\Longleftrightarrow \quad f \in \mathsf{clres}_{(-;-)}(C; D) \text{ und } f = \widehat{\overrightarrow{f}} \\ &\Longleftrightarrow \quad f = \min\{\, g \in \mathsf{clres}_{(-;-)}(C; D) : \overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} \,\}. \end{aligned}$$

Der Nachteil an der beschriebenen Bijektion $\varphi \mapsto \widehat{\varphi} = (\overleftarrow{\widetilde{\varphi}_*})^*$ ist jedoch, dass sie durch den Umweg über die untere Adjungierte nicht sehr natürlich ist und sich vor allem nicht auf den mehrstelligen Fall verallgemeinern lässt. Wünschenswert für eine Verallgemeinerung auf mehrstellige Abbildungen wäre eine Bijektion $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ mit der kanonischen Fortsetzung (wie im Fall für Galois-Abbildungen), gegebenenfalls samt einer Glättung $\varphi \mapsto (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;-)}$ zu einer dual residuierten Funktion (analog zum Fall für residuierte Abbildungen).

Das nächste Beispiel zeigt, dass sich diese beiden Wünsche im allgemeinen nicht für beliebige Hüllenstrukturen realisieren lassen.

Beispiel 5.2.49. Betrachte die superalgebraische Hüllenstruktur C aus Abbildung 5.4. Es sei $\varphi := \mathrm{id}_{C_\gamma}$. Als Identität auf dem Hüllenbereich von C ist $\varphi\colon C_\gamma \to C_\gamma$ natürlich insbesondere dual residuiert. Die kanonische Fortsetzung $\overleftarrow{\varphi} = \gamma_C^\circ \circ \mathrm{id}_{C_\gamma} \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_C$ auf C ist aber *nicht* dual residuiert (und somit C nicht residual):

$$\overleftarrow{\varphi}(a \wedge b) = \overleftarrow{\varphi}(\bot) = \bot \neq a = a \wedge \top = \overleftarrow{\varphi}(a) \wedge \overleftarrow{\varphi}(b).$$

Die $(-;-)$-Glättung liefert zwar eine dual residuierte Abbildung

$$(\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;-)}\colon C \to C,$$

allerdings erhalten wir auf diesem Weg im allgemeinen keine Inverse mehr zu $f \mapsto \overrightarrow{f}$, denn es ist

$$\overrightarrow{(\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;-)}} \neq \varphi.$$

Das sieht man folgendermaßen: Die $(-;-)$-Glättung $f := (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;-)} = (\gamma_C)^{\sim}_{(-;-)}$ bekommt man nach Definition durch $f(x) = \bigwedge_C \{\, \gamma_C(v) : x \leq v \in \mathcal{S}\_C \,\}$, es ist also $f(\bot) = f(a) = a$ und $f(b) = f(\top) = \top$. Damit ergibt sich

$$\overrightarrow{f}(\bot) = \gamma_C(f(\bot)) = \gamma_C(a) = a \neq \bot = \varphi(\bot).$$

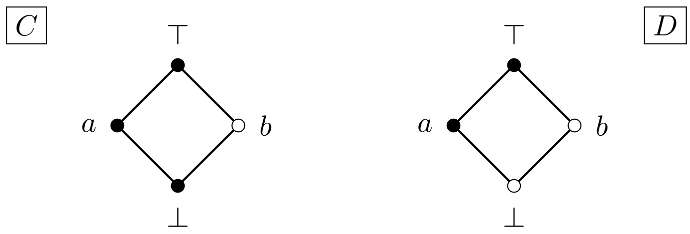

Abbildung 5.4: Nicht-residuale Hüllenstruktur C, residuale Hüllenstruktur D

Als Ausweg aus dem geschilderten Problem bietet sich eine weitere Einschränkung der betrachteten Klasse von Hüllenstrukturen an. Wir haben gesehen, dass die Hüllenstruktur C aus Abbildung 5.4 nicht *residual* ist. Beschränkt man sich jedoch auf residuale Hüllenstrukturen, so existiert tatsächlich noch eine andere als die oben beschriebene bijektive Korrespondenz $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, nämlich einfach $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$, da sich im Falle residualer Hüllenstrukturen mit φ auch $\overleftarrow{\varphi}$ als dual residuiert erweist (eine $(-;-)$-Glättung liefert dann nichts Neues). Dies führt uns auf die bindenden, dual residuierten Abbildungen (siehe Proposition 4.2.7), und wir formulieren gleich die gewünschte bijektive Korrespondenz:

Theorem 5.2.50. *Seien C, D Hüllenstrukturen und C* residual. *Die geordneten Mengen*

- $\mathsf{bres}_{(-;-)}(C;D)$ *aller bindenden, dual residuierten Abbildungen von C in D und*
- $\mathsf{res}_{(-;-)}(C_\gamma;D_\gamma)$ *aller dual residuierten Abbildungen von C_γ in D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen

$$f \mapsto \overrightarrow{f} \quad \textit{und} \quad \varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}.$$

Beweis. Zu zeigen ist nur noch, dass mit $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ auch $\overleftarrow{\varphi}\colon C \to D$ dual residuiert ist. Tatsächlich sind γ_D° und nach Voraussetzung $\gamma_C^\bullet$ dual residuiert (siehe Proposition 4.1.8), also ist $\overleftarrow{\varphi} = \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet$ eine Komposition dual residuierter Abbildungen, falls φ dual residuiert ist. □

Ist auch D eine residuale Hüllenstruktur, so ist schon für jede Abbildung $f\colon C \to D$ mit f auch $\overrightarrow{f} = \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ$ dual residuiert. Zwischen residualen Hüllenstrukturen induzieren also alle dual residuierten Abbildungen auch dual residuierte Abbildungen zwischen den Hüllenbereichen.

Für die Signatur $(\sigma;\tau) = (-;-)$ spielt ebenfalls die σ-Vollstetigkeit eine bedeutende Rolle, da sich im Falle superalgebraischer Hüllenstrukturen analog zu Proposition 5.2.47 ergibt, dass die Grundbegriffe bindend und co-vollstetig für dual residuierte Abbildungen übereinstimmen:

Proposition 5.2.51. *Seien C, D Hüllenstrukturen und C superalgebraisch. Für jede dual residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ gilt*

$$f \textit{ bindend} \iff f \textit{ co-vollstetig},$$

also $\mathsf{ccres}_{(-;-)}(C;D) = \mathsf{bres}_{(-;-)}(C;D)$. *Ist C auch residual, so folgt dementsprechend*

$$\mathsf{ccres}_{(-;-)}(C;D) \cong \mathsf{res}_{(-;-)}(C_\gamma;D_\gamma).$$

Beweis. Aus Theorem 5.2.8 folgt

$$\begin{aligned} f \text{ bindend} \quad &\iff \quad f \text{ stetig und außenbindend} \\ &\iff \quad f \text{ stetig und } \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}\_C = f \restriction \mathcal{S}\_C \\ &\iff \quad f \text{ co-vollstetig.} \end{aligned}$$ □

Wir betrachten noch den Unterschied von $\overleftarrow{\varphi}$ und $\widehat{\varphi}$. Ist C eine residuale und D eine superalgebraische Hüllenstruktur, so gilt für alle dual residuierten Abbildungen $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$

$$\widehat{\varphi} \leq \overleftarrow{\varphi},$$

denn $(\overleftarrow{\varphi})_*$ ist nach Voraussetzung stetig und residuiert, und aus $\varphi_* = (\overrightarrow{\overleftarrow{\varphi}})_* = \overrightarrow{(\overleftarrow{\varphi})_*}$ folgt $\tilde{\overleftarrow{\varphi}}_* = \overline{(\overleftarrow{\varphi})_*} \geq (\overleftarrow{\varphi})_*$ und somit die Behauptung $(\tilde{\overleftarrow{\varphi}}_*)^* \leq \overleftarrow{\varphi}$.

Das nächste Beispiel zeigt, dass $\widehat{\varphi}$ und $\overleftarrow{\varphi}$ im allgemeinen tatsächlich verschieden sind.

Beispiel 5.2.52. Betrachte die superalgebraische und residuale Hüllenstruktur D aus Abbildung 5.4. Für $\varphi := \mathrm{id}_{D_\gamma}$ berechnet man

x	$\bot$	a	b	$\top$
$\overleftarrow{\varphi}(x)$	a	a	$\top$	$\top$
$\widehat{\varphi}(x)$	$\bot$	a	$\bot$	$\top$

und demzufolge $\widehat{\varphi} \neq \overleftarrow{\varphi}$.

5.2.6 Duale Galois-Abbildungen

Als letzten einstelligen Fall untersuchen wir nun die Signatur $(\sigma;\tau) = (-;+)$, also duale Galois-Abbildungen.

Für eine beliebige duale Galois-Abbildung $f\colon C \to D$ zwischen Hüllenstrukturen ist auch $\overrightarrow{f} = \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C^\circ$ bereits eine duale Galois-Abbildung, da $\gamma_D^\bullet$ stets residuiert und γ_C° stets dual residuiert ist. Darüber hinaus gilt sogar

$$(\overrightarrow{f})^*_{(-;+)} = \overrightarrow{f^*_{(-;+)}},$$

wie das folgende Theorem zeigt.

Theorem 5.2.53. *Für jede duale Galois-Verbindung (f,g) zwischen Hüllenstrukturen C und D ist $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ eine duale Galois-Verbindung zwischen C_γ und D_γ.*

Beweis. Sei (f,g) eine duale Galois-Verbindung zwischen C und D. Dann gilt wegen $g \circ f \leq \mathrm{id}_C$ auch

$$\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \gamma_C^\bullet \circ g \circ \gamma_D \circ f \circ \gamma_C^\circ \leq \gamma_C^\bullet \circ g \circ f \circ \gamma_C^\circ \leq \gamma_C^\bullet \circ \mathrm{id}_C \circ \gamma_C^\circ = \mathrm{id}_{C_\gamma}$$

und ebenso $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} \leq \mathrm{id}_{D_\gamma}$ wegen $f \circ g \leq \mathrm{id}_D$. □

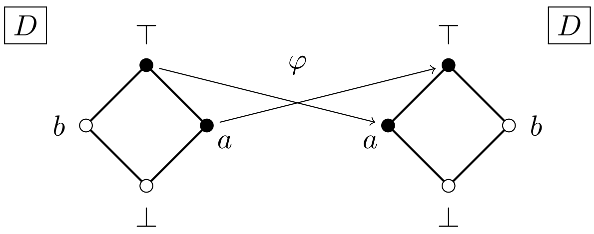

Abbildung 5.5: Zur Fortsetzung dualer Galois-Abbildungen

Ähnlich wie für dual residuierte Abbildungen können wir im Falle *residualer* Hüllenstrukturen auch für duale Galois-Abbildungen zwischen Hüllenbereichen eine gute Korrespondenz-Aussage entwickeln, die sich auf den mehrstelligen Fall verallgemeinern lässt. Wie das nächste Beispiel demonstriert, benötigen wir hier aber zusätzlich die $(-;+)$-Glättung (und damit superalgebraische Hüllenstrukturen), um aus der kanonischen Fortsetzung $\overleftarrow{\varphi}$ eine duale Galois-Abbildung zu formen. Deshalb ist das folgende Vorgehen dem für residuierte Abbildungen recht ähnlich.

Beispiel 5.2.54. Sei D die bereits im Beispiel 5.2.52 verwendete superalgebraische und residuale Hüllenstruktur. Die in Abbildung 5.5 dargestellte Funktion $\varphi\colon D_\gamma \to D_\gamma$ ist eine duale Galois-Abbildung. Für $\overleftarrow{\varphi}: D \to D$ berechnet man jedoch

x	$\bot$	a	b	$\top$
$\overleftarrow{\varphi}(x)$	$\top$	$\top$	a	a

und somit insbesondere $\overleftarrow{\varphi}(\top) \neq \bot$. Folglich ist $\overleftarrow{\varphi}$ keine duale Galois-Abbildung.

Die gewünschte bijektive Korrespondenz von dualen Galois-Abbildungen zwischen Hüllenbereichen mit geeigneten dualen Galois-Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenstrukturen vermöge $\varphi \mapsto (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;+)}$ wird uns unter der Voraussetzung residualer, superalgebraischer Hüllenstrukturen auf den Begriff der Co-Vollstetigkeit führen. Aus diesem Grund charakterisieren wir im folgenden erst stetige und dann co-vollstetige duale Galois-Abbildungen zwischen residualen Hüllenstrukturen.

Proposition 5.2.55. *Seien C, D Hüllenstrukturen, C residual und $f\colon C \to D$ eine duale Galois-Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) f ist stetig.

(2) Es gibt einen $\bigwedge$-Erzeuger M von C mit $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction M = \gamma_D \circ f \restriction M$.

(3) $\varphi \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_D^\bullet \circ f$ für eine duale Galois-Abbildung $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$.

Dabei ist φ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$, und es genügt, die Gleichung in (3) für eine $\bigwedge$-dichte Teilmenge von C zu verlangen.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist trivial. (2) $\Rightarrow$ (3): Die Abbildung $\overrightarrow{f} \circ \gamma_C^\bullet$ ist eine duale Galois-Abbildung, denn $\overrightarrow{f}$ ist eine duale Galois-Abbildung nach Theorem 5.2.53 und $\gamma_C^\bullet$ ist dual residuiert, da C residual ist. Auch $\gamma_D^\bullet \circ f$ ist eine duale Galois-Abbildung. Nach Voraussetzung gilt

$$\overrightarrow{f} \circ \gamma_C^\bullet \restriction M = \gamma_D^\bullet \circ f \circ \gamma_C \restriction M = \gamma_D^\bullet \circ f \restriction M$$

und somit $\overrightarrow{f} \circ \gamma^\bullet_C = \gamma^\bullet_D \circ f$. (3) $\Rightarrow$ (1) gilt nach Theorem 4.2.5. $\square$

Proposition 5.2.56. *Seien C, D Hüllenstrukturen, C superalgebraisch und residual, und sei $f\colon C \to D$ eine duale Galois-Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist co-vollstetig.

(2) $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction \mathcal{S}_-C = f \restriction \mathcal{S}_-C$.

(3) $f \restriction \mathcal{S}_-C = \overset{\leftrightarrows}{\varphi} \restriction \mathcal{S}_-C$ für eine duale Galois-Abbildung $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$.

Dabei ist φ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Ist f co-vollstetig, so gilt $\gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction \mathcal{S}_-C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_-C = f \restriction \mathcal{S}_-C$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Nach Theorem 5.2.53 ist $\overrightarrow{f}$ eine duale Galois-Abbildung, und laut Voraussetzung gilt

$$\overset{\leftrightarrows}{f} \restriction \mathcal{S}_-C = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction \mathcal{S}_-C = f \restriction \mathcal{S}_-C.$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Zunächst ergibt sich $\gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_-C = \gamma_D \circ \overset{\leftrightarrows}{\varphi} \restriction \mathcal{S}_-C = \overset{\leftrightarrows}{\varphi} \restriction \mathcal{S}_-C = f \restriction \mathcal{S}_-C$. Außerdem ist $\varphi \circ \gamma^\bullet_C \restriction \mathcal{S}_-C = \gamma^\bullet_D \circ \gamma^\circ_D \circ \varphi \circ \gamma^\bullet_C \restriction \mathcal{S}_-C = \gamma^\bullet_D \circ \overset{\leftrightarrows}{\varphi} \restriction \mathcal{S}_-C = \gamma^\bullet_D \circ f \restriction \mathcal{S}_-C$, woraus mit Proposition 5.2.55 die Stetigkeit von f folgt. $\square$

Korollar 5.2.57. *Sei C eine residuale, superalgebraische Hüllenstruktur und D eine vollständige Hüllenstruktur. Für jede duale Galois-Abbildung $f\colon C \to D$ gilt:*

$$f \text{ co-vollstetig} \iff f = (\overset{\leftrightarrows}{f})^\sim_{(-;+)}.$$

Beweis. Da f und $\overset{\leftrightarrows}{f}$ beide antiton sind, ergibt sich laut Theorem 3.1.19

$$f = (\overset{\leftrightarrows}{f})^\sim_{(-;+)} \iff f \restriction \mathcal{S}_-C = \overset{\leftrightarrows}{f} \restriction \mathcal{S}_-C = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction \mathcal{S}_-C,$$

also folgt die Behauptung mit Proposition 5.2.56. $\square$

In Vorbereitung auf das nächste Theorem geben wir analog zu Lemma 5.2.15 ein hinreichendes Kriterium für die Gleichheit von induzierten dualen Galois-Abbildungen im Falle der Stetigkeit an.

Lemma 5.2.58. *Seien C, D Hüllenstrukturen, C residual, $f_1, f_2\colon C \to D$ stetige Abbildungen und M eine $\bigwedge$-dichte Teilmenge von C. Sind $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ duale Galois-Abbildungen und stimmen f_1 und f_2 auf M überein, so ist bereits $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_2}$.*

Beweis. Aus $f_1 \restriction M = f_2 \restriction M$ und der Stetigkeit von f_1 und f_2 folgt

$$\overrightarrow{f_1} \circ \gamma^\bullet_C \restriction M = \gamma^\bullet_D \circ f_1 \restriction M = \gamma^\bullet_D \circ f_2 \restriction M = \overrightarrow{f_2} \circ \gamma^\bullet_C \restriction M.$$

Da $\gamma^\bullet_C$ nach Voraussetzung dual residuiert ist, ist $\gamma^\bullet_C[M]$ ein $\bigwedge$-Erzeuger von C_γ. Somit sind $\overrightarrow{f_1}$ und $\overrightarrow{f_2}$ identisch. $\square$

Nun können wir unter passenden Voraussetzungen zeigen, dass die co-vollstetigen, dualen Galois-Abbildungen ausreichen, um durch $f \mapsto \overrightarrow{f}$ alle dualen Galois-Abbildungen zu induzieren.

Theorem 5.2.59. *Sei C eine residuale, superalgebraische Hüllenstruktur und D eine vollständige Hüllenstruktur. Für jede duale Galois-Abbildung $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ ist*

$$(\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;+)}\colon C \to D$$

eine co-vollstetige duale Galois-Abbildung mit

$$\overrightarrow{(\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;+)}} = \varphi.$$

Beweis. Sei $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ eine duale Galois-Abbildung. Nach Theorem 3.1.19 ist auch $f := (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;+)}$ eine duale Galois-Abbildung, und wegen $f \upharpoonright \mathcal{S}\_C = \overleftarrow{\varphi} \upharpoonright \mathcal{S}\_C$ und Proposition 5.2.56 ist f co-vollstetig. Insbesondere sind f und $\overleftarrow{\varphi}$ stetig, also folgt mit Lemma 5.2.58

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\overleftarrow{\varphi}} = \varphi. \qquad \square$$

Damit ergibt sich insgesamt die bijektive Korrespondenz:

Korollar 5.2.60. *Sei C eine residuale, superalgebraische und D eine vollständige Hüllenstruktur. Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{ccres}_{(-;+)}(C; D)$ *aller co-vollstetigen dualen Galois-Abbildungen von C in D und*
- $\mathsf{res}_{(-;+)}(C_\gamma; D_\gamma)$ *aller dualen Galois-Abbildungen von C_γ in D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen

$$f \mapsto \overrightarrow{f} \quad \textit{und} \quad \varphi \mapsto (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(-;+)}.$$

Beweis. Nach Korollar 5.2.57, Theorem 5.2.59 und den Eigenschaften der Glättung. $\square$

5.3 Mehrstelliger Fall

In diesem Abschnitt werden sowohl geeignete bijektive Korrespondenzen als auch die wichtigsten Grundbegriffe für mehrstellige $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen untersucht. Es ist sinnvoll, die Untersuchungen hauptsächlich in Signaturen der Form $(\sigma;+)$ und $(\sigma;-)$ einzuteilen. Durch die Betrachtung der mehrstelligen Funktionen in ihren einzelnen Koordinaten können dann die in den einstelligen Fällen erzielten Ergebnisse ausgenutzt werden. Für den Rest des Kapitels sei stets $\sigma \in \{+,-\}^n$. Außerdem sei für die weiteren Ausführungen an die Eigenschaften σ-stetig, σ-vollstetig, σ-residual (siehe die Vorbereitungen am Anfang des Kapitels) und den Begriff des σ-Erzeugers (aus Definition 2.2.7) erinnert.

5.3.1 $(\sigma;-)$-residuierte Abbildungen

Wir beginnen mit $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen im Fall $\tau = -$. Im folgenden sei immer $(C; D) = (C_1, \ldots, C_n; D)$ eine Familie von Hüllenstrukturen.

Unter den richtigen Voraussetzungen überträgt sich die $(\sigma;-)$-Residuiertheit einer Abbildung zwischen Hüllenstrukturen auf ihre kanonisch induzierte Abbildung, so dass auch die Residuale der Induzierten auf kanonische Weise entstehen:

Theorem 5.3.1. *Sei $f\colon C \to D$ eine $(\sigma;-)$-residuierte Abbildung. Ist f bindend, so ist auch $\overrightarrow{f}\colon C_\gamma \to D_\gamma$ eine $(\sigma;-)$-residuierte Abbildung, und für jedes $i \in \underline{n}$ gilt*

$$(\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;-)} = \overrightarrow{f^{(i)}_{(\sigma;-)}}.$$

Statt bindend genügt hier bereits die schwächere Voraussetzung, dass f in der i-ten Variablen im Fall $\sigma_i = +$ bindend und im Fall $\sigma_i = -$ abgeschlossen ist ($i \in \underline{n}$).

Beweis. Sei $i \in \underline{n}$ und $c \in \prod C_\gamma$. Da f_i^c nach Voraussetzung $(\sigma_i;-)$-residuiert und bindend (für $\sigma_i = +$) bzw. abgeschlossen (für $\sigma_i = -$) ist, folgt mit Theorem 5.2.44 bzw. Korollar 5.2.48 zunächst, dass

$$(\overrightarrow{f})^c_i = \overrightarrow{f^c_i}$$

$(\sigma_i;-)$-residuiert ist (siehe auch Lemma 4.2.11). Insgesamt ist $\overrightarrow{f}$ damit $(\sigma;-)$-residuiert. Außerdem gilt für alle $c \in \prod C[i \mapsto D]_\gamma$

$$((\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;-)})^c_i = ((\overrightarrow{f})^c_i)^*_{(\sigma_i;-)} = (\overrightarrow{f^c_i})^*_{(\sigma_i;-)} = \overrightarrow{(f^c_i)^*_{(\sigma_i;-)}} = \overrightarrow{(f^{(i)}_{(\sigma;-)})^c_i} = (\overrightarrow{f^{(i)}_{(\sigma;-)}})^c_i,$$

also die Behauptung. $\square$

Für den Pfeil-Operator in der umgekehrten Richtung gilt:

Proposition 5.3.2. *Ist C σ-residual und $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ $(\sigma;-)$-residuiert, so ist $\overleftarrow{\varphi}\colon C \to D$ eine bindende und $(\sigma;-)$-residuierte Abbildung.*

Beweis. Die Abbildung $\overleftarrow{\varphi}$ ist stets bindend. Sei φ $(\sigma;-)$-residuiert, $i \in \underline{n}$ und $a \in \prod C$. Dann ist $\varphi_i^{(\prod \gamma_C)(a)}\colon (C_i)_\gamma \to D_\gamma$ $(\sigma_i;-)$-residuiert und nach Theorem 5.2.44 (für $\sigma_i = +$) bzw. Theorem 5.2.50 (für $\sigma_i = -$ und somit C_i residual) auch

$$(\overleftarrow{\varphi})^a_i = \overleftarrow{\varphi_i^{(\prod \gamma_C)(a)}}$$

$(\sigma_i;-)$-residuiert (siehe Lemma 4.2.12). Insgesamt ist $\overleftarrow{\varphi}$ damit $(\sigma;-)$-residuiert. $\square$

Als Folgerung ergibt sich unmittelbar eine Charakterisierung der bindenden $(\sigma;-)$-residuierten Abbildungen:

Korollar 5.3.3. *Sei C σ-residual. Eine $(\sigma;-)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann bindend, wenn es ein $(\sigma;-)$-residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ gibt mit*

$$f = \overleftarrow{\varphi}.$$

Dabei ist φ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$, und es genügt, die Gleichung für einen σ-Erzeuger von C zu verlangen.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Theorem 5.3.4. Da mit φ nach Voraussetzung auch die Abbildung $\overleftarrow{\varphi} = \gamma_D^{\circ} \circ \varphi \circ \gamma_C^{\bullet}$ $(\sigma;-)$-residuiert ist, genügt die Beschränkung der Gleichung auf einen σ-Erzeuger. $\square$

Jetzt können wir bereits das Korrespondenz-Theorem für $(\sigma;-)$-residuierte Abbildungen formulieren.

Theorem 5.3.4. *Sei C σ-residual. Die punktweise geordneten Mengen*

- $\mathsf{bres}_{(\sigma;-)}(C;D)$ *aller bindenden, $(\sigma;-)$-residuierten Abbildungen von C in D und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;-)}(C_\gamma;D_\gamma)$ *aller $(\sigma;-)$-residuierten Abbildungen von C_γ in D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Funktionen

$$f \mapsto \overrightarrow{f} \quad \textit{und} \quad \varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}.$$

Beweis. Wegen Theorem 5.3.1, Proposition 5.3.2 und Proposition 4.2.7. □

Als nächstes werden die Grundbegriffe außenbindend, innenbindend und bindend (in dieser Reihenfolge) für $(\sigma;-)$-residuierte Abbildungen zwischen beliebigen Hüllenstrukturen charakterisiert.

Proposition 5.3.5. *Es sei $B = (B_1, \ldots, B_n)$ ein σ-Erzeuger von C und $f \colon C \to D$ eine $(\sigma;-)$-residuierte Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist außenbindend.

(2) $\gamma_D \circ f \restriction B = f \restriction B$.

(3) $\gamma_D \circ f_i^b \restriction B_i = f_i^b \restriction B_i$ für ein $b \in \prod B$ und ein $i \in \underline{n}$.

Wegen der Extensivität von γ_D genügt in (2) und (3) natürlich die Ungleichung für $\leq$.

Beweis. (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ist klar. (3) ⇒ (1): Sei $i \in \underline{n}$ und $b \in \prod B$ mit $\gamma_D \circ f_i^b \restriction B_i = f_i^b \restriction B_i$. Die Menge B_i ist σ_i-dicht in C_i, und f_i^b ist $(\sigma_i;-)$-residuiert, also $f_i^b[B_i]$ $\bigwedge$-dicht in D. Somit ist auch $f[B] \supseteq f_i^b[B_i]$ $\bigwedge$-dicht in D und außerdem $f[B] \subseteq D_\gamma$, woraus mit Lemma 4.2.17 die Behauptung folgt. □

Eine mehrstellige Abbildung $f \colon C \to D$ ist nach Theorem 4.2.28 genau dann innenbindend, wenn sie in jeder Variablen innenbindend ist. Dass f in jeder Variablen innenbindend ist, lässt sich zeigen, indem für alle $i \in \underline{n}$ und alle $a \in \prod C$ die Abbildung f_i^a als innenbindend nachgewiesen wird. Die nächste Proposition besagt, dass man sich dabei auf die Elemente eines σ-Erzeugers beschränken kann, falls f $(\sigma;\tau)$-residuiert ist.

Proposition 5.3.6. *Sei $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ eine beliebige Signatur und $B = (B_1, \ldots, B_n)$ ein σ-Erzeuger von C. Eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung $f \colon C \to D$ ist genau dann innenbindend, wenn für alle $b \in \prod B$ und jedes $i \in \underline{n}$ die Abbildung $f_i^b \colon C_i \to D$ innenbindend ist.*

Beweis. Die Richtung „⇒“ folgt aus Theorem 4.2.28. „⇐“: Sei f $(\sigma;\tau)$-residuiert und f_i^b innenbindend für alle $b \in \prod B$ und alle $i \in \underline{n}$. Nun sei $i \in \underline{n}$ und $x \in C_i$. Mit den Schreibweisen $C' = (C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_n)$, $B' = (B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n)$ und $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ werden durch

$$\begin{aligned} g(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) &= f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \gamma_{C_i}(x), a_{i+1}, \ldots, a_n), \\ h(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) &= f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

zwei $(\sigma';\tau)$-residuierte Abbildungen $g, h \colon C' \to D$ festgelegt, und die Voraussetzung besagt, dass g und h auf dem σ'-Erzeuger B' von C' identisch sind. Also ist bereits $g = h$ (siehe Proposition 2.2.8) und somit $f_i^a \circ \gamma_{C_i} = f_i^a$ für alle $a \in \prod C$ und alle $i \in \underline{n}$, d. h. f ist (in jeder Variablen) innenbindend. □

Korollar 5.3.7. *Sei $B = (B_1, \dots, B_n)$ ein σ-Erzeuger von C und $f\colon C \to D$ eine $(\sigma; -)$-residuierte Abbildung. Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist bindend.

(2) f_i^b ist bindend für alle $b \in \prod B$ und alle $i \in \underline{n}$.

Beweis. Nach Proposition 5.3.5 und Proposition 5.3.6. □

Unter der Voraussetzung superalgebraischer Hüllenstrukturen sind die Grundbegriffe bindend und σ-vollstetig für $(\sigma; -)$-residuierte Abbildungen identisch:

Proposition 5.3.8. *Sind die Hüllenstrukturen $C_1, \dots, C_n$ superalgebraisch, so gilt für jede $(\sigma; -)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$*

$$f \text{ bindend} \iff f\ \sigma\text{-vollstetig},$$

also $\mathsf{ccres}_{(\sigma;-)}(C; D) = \mathsf{bres}_{(\sigma;-)}(C; D)$.

Beweis. Mit Proposition 5.3.5 erhält man

$$\begin{aligned} f \text{ bindend} &\iff f \text{ stetig und außenbindend} \\ &\iff f \text{ stetig und } \gamma_Q \circ f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = f \restriction \mathcal{S}_\sigma C \\ &\iff f\ \sigma\text{-vollstetig}. \end{aligned}$$ □

Nun charakterisieren wir die Eigenschaft bindend noch speziell für $([+]; -)$-residuierte Abbildungen. Hervorzuheben ist dabei insbesondere, dass sie sich mit Hilfe der Residuale allein über die Eigenschaft außenbindend beschreiben lässt. Um eine kurze Formulierung zu erreichen, sei an die früher festgelegten Konventionen erinnert, dass im Fall $i = 0$ sowohl $a[i \mapsto x] = a$ als auch $f^{(i)}_{([+];-)} = f$ gilt.

Theorem 5.3.9. *Sei $f\colon C \to D$ eine $([+]; -)$-residuierte Abbildung und $C_0 := D$. Für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ sei außerdem J_i ein $\bigvee$-Erzeuger von C_i, und es sei $J = (J_1, \dots, J_n)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist bindend.

(2) f_i^u ist bindend für alle $u \in \prod J$ und alle $i \in \underline{n}$.

(3) $f^{(i)}_{([+];-)}$ ist außenbindend für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

(4) $\gamma_{C_i} \circ f^{(i)}_{([+];-)} \restriction J[i \mapsto J_0] = f^{(i)}_{([+];-)} \restriction J[i \mapsto J_0]$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

Beweis. (1) ⇔ (2) gilt nach Korollar 5.3.7. (1) ⇔ (3): Für $i \in \underline{n}$ ist die Abbildung f genau dann in der i-ten Variablen innenbindend, wenn $f^{(i)}_{([+];-)}$ in der i-ten Variablen außenbindend ist (siehe Proposition 5.2.41). Mit Lemma 4.2.27 und Theorem 4.2.28 ergibt sich die Behauptung. (3) ⇔ (4) folgt aus Proposition 5.3.5. □

Weitere, über das vorige Theorem hinausgehende Charakterisierungen von bindenden, $([+]; -)$-residuierten Abbildungen folgen aus Theorem 5.3.42 am Ende des Kapitels. Aus Gründen der Übersichtlichkeit geben wir diese bereits hier an:

Korollar 5.3.10. *Für alle $([+];-)$-residuierten Abbildungen $f\colon C \to D$ sind äquivalent:*

(1) f ist bindend.

(2) $f^{(i)}_{([+];-)}$ ist bindend für mindestens ein $i \in \underline{n}$.

(3) $f^{(i)}_{([+];-)}$ ist bindend für alle $i \in \underline{n}$.

Beweis. Dies gilt wegen $\big(f^{(i)}_{([+];-)}\big)^{(i)}_{([+];-)} = f$ nach Theorem 5.3.42. □

5.3.2 $(\sigma;+)$-residuierte Abbildungen

Nun betrachten wir $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen im Fall $\tau = +$. Auch hier sei stets $(C;D) = (C_1,\ldots,C_n;D)$ eine Familie von (zunächst beliebigen) Hüllenstrukturen.

Unter der Voraussetzung der σ-Stetigkeit bewahrt der Pfeil-Operator $f \mapsto \overrightarrow{f}$ die $(\sigma;+)$-Residuiertheit, und die Residuale der induzierten Abbildung ergeben sich auf kanonische Weise.

Theorem 5.3.11. *Für jede σ-stetige und $(\sigma;+)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist die Abbildung $\overrightarrow{f}\colon C_\gamma \to D_\gamma$ $(\sigma;+)$-residuiert, und für jedes $i \in \underline{n}$ gilt*

$$(\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;+)} = \overrightarrow{f^{(i)}_{(\sigma;+)}}.$$

Dies ist also erst recht für alle stetigen, $(\sigma;+)$-residuierten Abbildungen der Fall.

Beweis. Sei $i \in \underline{n}$ und $c \in \prod C_\gamma$. Nach Voraussetzung ist f^c_i $(\sigma_i;+)$-residuiert und im Fall $\sigma_i = +$ außerdem stetig. Mit Korollar 5.2.3 (für $\sigma_i = +$) bzw. Theorem 5.2.53 (für $\sigma_i = -$) folgt daraus, dass die Abbildung

$$(\overrightarrow{f})^c_i = \overrightarrow{f^c_i}$$

$(\sigma_i;+)$-residuiert ist. Insgesamt ist somit $\overrightarrow{f}$ $(\sigma;+)$-residuiert. Außerdem gilt für alle $c \in \prod C[i \mapsto D]_\gamma$ analog zum Beweis von Theorem 5.3.1

$$\big((\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;+)}\big)^c_i = \big((\overrightarrow{f})^c_i\big)^*_{(\sigma_i;+)} = (\overrightarrow{f^c_i})^*_{(\sigma_i;+)} = \overrightarrow{(f^c_i)^*_{(\sigma_i;+)}} = \overrightarrow{\big(f^{(i)}_{(\sigma;+)}\big)^c_i} = \big(\overrightarrow{f^{(i)}_{(\sigma;+)}}\big)^c_i$$

und folglich die Behauptung. □

Beispiel 5.3.12. Sei $Q = (L,\circ)$ ein *Quantal*, d. h. L ein vollständiger Verband und $\circ$ eine zweistellige assoziative und residuierte Operation auf L (siehe Beispiel 2.2.26).

Ein *Nukleus* auf Q ist eine Hüllenoperation $j\colon L \to L$, so dass für alle $x, y \in Q$ gilt:

$$j(x) \circ j(y) \leq j(x \circ y).$$

Diese Bedingung besagt gerade, dass die Funktion $\circ\colon L \times L \to L$ bezüglich der Hüllenoperationen $j \times j$ und j schwach stetig ist. Wegen der Residuiertheit ist $\circ$ insbesondere isoton, und aus der schwachen Stetigkeit folgt daher auch die Stetigkeit von $\circ$, d. h.

$$j\big(j(x) \circ j(y)\big) = j(x \circ y).$$

Mit Theorem 5.3.11 erhält man nun leicht die wohlbekannte Tatsache, dass der Hüllenbereich eines Nukleus auf einem Quantal wieder ein Quantal ist. Denn für jeden Nukleus j auf $Q = (L, \circ)$ ist nach dem Theorem die induzierte Abbildung $\circ_j := \overrightarrow{\circ}$ eine residuierte Operation auf dem Hüllenbereich $(j[Q], \leq)$, und mit der Stetigkeit zeigt man außerdem schnell, dass sich die Assoziativität von $\circ$ auf $\circ_j$ überträgt, womit $Q_j := (j[Q], \leq, \circ_j)$ wieder ein Quantal ist.

Für unitale Quantale ist dies nur der Spezialfall von Theorem 4.3.15 für kleine Quantaloide mit genau einem Objekt. Der Beweis von Theorem 4.3.15 ist mit Theorem 5.3.11 nun eingeholt.

Es folgen verschiedene Charakterisierungen der Stetigkeit für $(\sigma; +)$-residuierte und dann vor allem für $([+]; +)$-residuierte Funktionen.

Proposition 5.3.13. *Eine $(\sigma; +)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann stetig, wenn es ein $(\sigma; +)$-residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ gibt mit*

$$\varphi \circ \gamma_C^\bullet = \gamma_D^\bullet \circ f.$$

Dabei ist φ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$. Ist C σ-residual, so genügt es, die obige Gleichung für einen σ-Erzeuger von C zu verlangen.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Theorem 5.3.11 und Theorem 4.2.5. Ist C σ-residual, so kann die Gleichung deshalb auf einen σ-Erzeuger beschränkt werden, weil mit f und φ auch $\gamma_D^\bullet \circ f$ und $\varphi \circ \gamma_C^\bullet$ $(\sigma; +)$-residuiert sind (für jedes $i \in \underline{n}$ ist $\gamma_{C_i}^\bullet$ residuiert und nach Voraussetzung für $\sigma_i = -$ auch dual residuiert). □

Aus Proposition 5.3.6 zu innenbindenden Abbildungen lässt sich ableiten:

Korollar 5.3.14. *Sei $B = (B_1, \dots, B_n)$ ein σ-Erzeuger von C. Eine $(\sigma; +)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann stetig, wenn für alle $b \in \prod B$ und jedes $i \in \underline{n}$ die Abbildung $f_i^b\colon C_i \to D$ stetig ist.*

Beweis. Sei f $(\sigma; +)$-residuiert. Dann ist auch $\gamma_D^\bullet \circ f$ $(\sigma; +)$-residuiert, und f ist genau dann stetig, wenn $\gamma_D^\bullet \circ f$ innenbindend ist. Wegen $(\gamma_D^\bullet \circ f)_i^b = \gamma_D^\bullet \circ f_i^b$ folgt die Behauptung somit aus Proposition 5.3.6. □

Als nächstes übertragen wir die Resultate aus Theorem 5.2.2 zur Stetigkeit und Abgeschlossenheit residuierter Abbildungen auf den mehrstelligen Fall und betrachten dabei zuerst nur eine Variable.

Proposition 5.3.15. *Sei $f\colon C \to D$ eine $(\sigma; +)$-residuierte Abbildung. Für jedes $i \in \underline{n}$ mit $\sigma_i = +$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist in der i-ten Variablen stetig.

(2) $f_{(\sigma;+)}^{(i)}$ ist in der i-ten Variablen abgeschlossen.

(3) Es gibt einen $\bigwedge$-Erzeuger M des Hüllenbereichs D_γ mit

$$\gamma_{C_i} \circ f_{(\sigma;+)}^{(i)} \restriction C[i \mapsto M] = f_{(\sigma;+)}^{(i)} \restriction C[i \mapsto M].$$

(4) Es gibt einen σ-Erzeuger B von C und einen $\bigwedge$-Erzeuger M von D_γ mit

$$\gamma_{C_i} \circ f^{(i)}_{(\sigma;+)} \restriction B[i \mapsto M] = f^{(i)}_{(\sigma;+)} \restriction B[i \mapsto M].$$

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Für alle $a \in \prod C$ ist nach Theorem 5.2.2 die residuierte Abbildung f^a_i genau dann stetig, wenn $(f^a_i)^* = (f^{(i)}_{(\sigma;+)})^a_i$ abgeschlossen ist.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Wiederum nach Theorem 5.2.2 ist für alle $a \in \prod C$ die Abbildung $\big(f^{(i)}_{(\sigma;+)}\big)^a_i$ genau dann abgeschlossen, wenn es eine $\bigwedge$-dichte Teilmenge M von D_γ gibt mit

$$\gamma_{P_i} \circ \big(f^{(i)}_{(\sigma;+)}\big)^a_i \restriction M = \big(f^{(i)}_{(\sigma;+)}\big)^a_i \restriction M.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) ist klar. (4) $\Rightarrow$ (3): Es sei $m \in M$ und $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ sowie

$$C' = (C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_n) \quad \text{und} \quad B' = (B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n).$$

Die Abbildung $g\colon C' \to C_i$ sei definiert durch

$$g(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f^{(i)}_{(\sigma;+)}(a_1, \ldots, a_{i-1}, m, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Nach Voraussetzung ist g $(\sigma'; -)$-residuiert, und es gilt

$$\gamma_{C_i} \circ g \restriction B' = g \restriction B'.$$

Da B' eine σ'-dichte Familie in C' ist, folgt aus Proposition 5.3.5, dass g außenbindend ist. Insgesamt erhält man damit das Gewünschte. □

Als Folgerung erhalten wir nun eine Verallgemeinerung von Theorem 5.2.2, also gewissermaßen den *Hauptsatz zur Stetigkeit mehrstelliger residuierter Abbildungen* zwischen Hüllenstrukturen.

Theorem 5.3.16. *Sei $J = (J_1, \ldots, J_n)$ ein $[+]$-Erzeuger von C und M ein $\bigwedge$-Erzeuger des Hüllenbereichs D_γ. Für jede residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist stetig.

(2) Für alle $i \in \underline{n}$ und alle $u \in \prod J$ ist f^u_i stetig.

(3) Für alle $i \in \underline{n}$ ist $f^{(i)}$ in der i-ten Variablen abgeschlossen.

(4) Für alle $i \in \underline{n}$ und alle $u \in \prod J$ ist $(f^{(i)})^u_i$ abgeschlossen.

(5) Für alle $i \in \underline{n}$ ist $\gamma_{C_i} \circ f^{(i)} \restriction C[i \mapsto M] = f^{(i)} \restriction C[i \mapsto M]$.

(6) Für alle $i \in \underline{n}$ ist $\gamma_{C_i} \circ f^{(i)} \restriction J[i \mapsto M] = f^{(i)} \restriction J[i \mapsto M]$.

Beweis. Dies ergibt sich aus Korollar 5.3.14 und Proposition 5.3.15. □

Das nächste Beispiel demonstriert die Anwendung dieser Charakterisierung stetiger, residuierter Abbildungen auf Quantale und Quantaloide.

Beispiel 5.3.17. (a) Wir setzen als erstes das Beispiel 5.3.12 zu Quantalen fort. Ist j ein Nukleus auf dem Quantal $Q = (L, \circ)$, so ist $Q_j = (j[Q], \leq, \circ_j)$ mit $\circ_j = \overrightarrow{\circ}$, also $c \circ_j d = j(c \circ d)$, wieder ein Quantal. Bezeichnen wir wie üblich die Residuale von $\circ$ mit $\leftarrow\, = \circ^{(1)}$ und $\rightarrow\, = \circ^{(2)}$ und entsprechend das erste und zweite Residual von $\circ_j$ mit $\leftarrow_j$ bzw. $\rightarrow_j$, so gilt nach Theorem 5.3.11 in der Pfeil-Schreibweise

$$\leftarrow_j \,=\, {\circ_j}^{(1)} = (\overrightarrow{\circ})^{(1)} = \overrightarrow{\circ^{(1)}} = \overrightarrow{(\leftarrow)} \quad \text{und} \quad \rightarrow_j \,=\, {\circ_j}^{(2)} = (\overrightarrow{\circ})^{(2)} = \overrightarrow{\circ^{(2)}} = \overrightarrow{(\rightarrow)},$$

also elementweise $d \leftarrow_j c = j(d \leftarrow c)$ und $c \rightarrow_j d = j(c \rightarrow d)$. Nach Theorem 5.3.16 wissen wir jedoch außerdem, dass die Residuale $\leftarrow$ und $\rightarrow$ wegen der Stetigkeit von $\circ$ *abgeschlossen* sind (nach Lemma 4.2.25 folgt die Abgeschlossenheit schon aus der Abgeschlossenheit in einer Variablen). Somit gilt für alle $c, d \in Q_j$

$$d \leftarrow_j c = d \leftarrow c \quad \text{und} \quad c \rightarrow_j d = c \rightarrow d.$$

Dies zeigt, wie sich aus dem Theorem zu induzierten residuierten Abbildungen zusammen mit der Charakterisierung der Stetigkeit die optimale Beschreibung der zugehörigen Residuale ergibt.

(b) Sei Q ein Quantal. Bekanntlich gilt (siehe etwa [82]):

Eine Teilmenge S von Q ist genau dann von der Form Q_j für einen Nukleus j auf Q, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- *S ist unter beliebigen Infima abgeschlossen.*
- *Für alle $s \in S$ und alle $x \in Q$ ist $s \leftarrow x \in S$.*
- *Für alle $s \in S$ und alle $x \in Q$ ist $x \rightarrow s \in S$.*

Begründung: Die erste Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass S ein Hüllenbereich ist (siehe Korollar 1.2.29). Die übrigen beiden Bedingungen besagen, dass das erste Residual $\leftarrow$ in der ersten und das zweite Residual $\rightarrow$ in der zweiten Variablen abgeschlossen ist. Mit Theorem 5.3.16 folgt somit bereits die Behauptung.

(c) Mit derselben Argumentation wie in Teil (b) erhält man aus Theorem 5.3.16 und den Bezeichnungen aus Theorem 4.3.15 auch die folgende Charakterisierung *quantaloidaler* Nuklei mit Hilfe der Residuale in Quantaloiden (siehe [83]):

Sei $\mathcal{Q}$ ein Quantaloid. Eine Unterkategorie $\mathcal{S}$ von $\mathcal{Q}$ ist genau dann von der Form $\mathcal{Q}_N$ für einen quantaloidalen Nukleus N auf $\mathcal{Q}$, wenn gilt:

- *Jede Morphismenmenge $\mathcal{S}(A, B)$ ist unter beliebigen Infima (in $\mathcal{Q}(A, B)$) abgeschlossen.*
- *Für alle $f \in \mathcal{Q}(A, B)$ und alle $h \in \mathcal{S}(A, C)$ ist $h \leftarrow f \in \mathcal{S}(B, C)$.*
- *Für alle $g \in \mathcal{Q}(B, C)$ und alle $h \in \mathcal{S}(A, C)$ ist $g \rightarrow h \in \mathcal{S}(A, B)$.*

In den folgenden drei Beispielen behandeln wir Hüllenstrukturen, deren zugrundeliegende geordnete Menge eine Heyting-Algebra mit stetiger Infimum-Operation ist. Die Beispiele können beim ersten Lesen dieses Abschnitts auch gut übersprungen werden.

Beispiel 5.3.18. Sei C eine Hüllenstruktur, so dass C (oder genauer $C_{\leq}$) außerdem eine Heyting-Algebra ist. Damit ist C ein beschränkter Verband, dessen zweistellige Infimum-Operation residuiert ist. Das zweite Residual von $\wedge_C$ werde wie bisher mit $\supset_C$ bezeichnet (siehe Beispiel 2.2.16), es gilt also

$$x \wedge y \leq z \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq x \supset z.$$

Nach Beispiel 5.2.4 ist $\wedge_C$ immer abgeschlossen. Sei nun $\wedge_C$ auch *stetig*. Dann ist der Hüllenbereich C_γ wieder eine Heyting-Algebra, denn C_γ ist wieder ein beschränkter Verband und mit der Stetigkeit von $\wedge_C$ folgt laut Theorem 5.3.11 die Residuiertheit von $\wedge_{C_\gamma} = \overrightarrow{\wedge_C}$.

Die Stetigkeit der abgeschlossenen Operation $\wedge_C$ ist gleichbedeutend damit, dass die Hüllenoperation γ_C $\wedge$-erhaltend ist! Dies sieht man sofort an der elementfreien Formulierung beider Aussagen (vergleiche Lemma 4.2.21):

$$\gamma_C \circ \wedge = \wedge \circ (\gamma_C \times \gamma_C).$$

Das Residual $\supset_C$ ist nach Theorem 5.3.16 abgeschlossen in der zweiten Variablen, also insbesondere abgeschlossen. Wie bereits im vorigen Beispiel gezeigt wurde, erhält man das induzierte Residual $\supset_{C_\gamma} = \overrightarrow{\supset_C}$ daher durch $c \supset_{C_\gamma} d = c \supset_C d$ für alle $c, d \in C_\gamma$.

Im folgenden sei $b := \perp_{C_\gamma} = \gamma_C(\perp_C)$. Die Abbildung $(\,\cdot\, \supset b)$ ist eine Galois-Abbildung auf C, und ihr $(+;-)$-Residual ist wieder $(\,\cdot\, \supset b)$. Wir betrachten nun die durch diese Galois-Verbindung induzierte Hüllenoperation η auf C, es sei also

$$\eta(x) := (x \supset b) \supset b.$$

Da $\supset$ in der zweiten Variablen abgeschlossen ist, gilt für alle $x \in C$

$$\gamma_C(x \supset b) = x \supset b.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass die Abbildung $(\,\cdot\, \supset b)\colon C \to C$ außenbindend ist. Aus Proposition 5.2.41 folgt somit einerseits, dass $(\,\cdot\, \supset b)$ auch innenbindend ist, d. h. auch

$$\gamma_C(x) \supset b = x \supset b$$

für alle $x \in C$ gilt, und andererseits folgt aus demselben Theorem

$$\gamma_C \leq \eta.$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt:

> *Für jede Hüllenstruktur C, die eine Heyting-Algebra ist, gilt: Ist die Infimum-Operation $\wedge_C$ stetig (d. h. erhält γ_C binäre Infima), so ist auch C_γ eine Heyting-Algebra, und es ist $\gamma_C(x) \leq (x \supset \perp_{C_\gamma}) \supset \perp_{C_\gamma}$ für alle $x \in C$.*

Die letzte Ungleichung kann im allgemeinen nicht zu einer Gleichung verschärft werden.

Für *vollständige* Heyting-Algebren (d. h. Rahmen oder Lokale) ist eine $\wedge$-erhaltende Hüllenoperation dasselbe wie ein Nukleus. Dass der Hüllenbereich in diesem Fall wieder eine vollständige Heyting-Algebra ist, folgt dann bereits mit $\circ = \wedge$ aus Beispiel 5.3.12.

Beispiel 5.3.19. Wir setzen das vorige Beispiel fort: Es sei C eine Hüllenstruktur, die außerdem eine Heyting-Algebra ist, und es sei $b = \bot_{C_\gamma} = \gamma_C(\bot_C)$ sowie

$$\eta(x) = (x \supset b) \supset b.$$

Darüber hinaus sei $\wedge_C$ stetig (d. h. γ_C $\wedge$-erhaltend) und somit auch C_γ eine Heyting-Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) C_γ ist ein Boolescher Verband.

(2) $(c \supset b) \supset b \leq c$ für alle $c \in C_\gamma$.

(3) $\gamma_C = \eta$, d. h. $\gamma_C(x) = (x \supset b) \supset b$ für alle $x \in C$.

(4) $\gamma_C \geq \eta$.

(5) $\eta \circ \gamma_C = \gamma_C$.

Begründung: (1) $\Leftrightarrow$ (2) ist wegen $b = \bot_{C_\gamma}$ wohlbekannt, (2) $\Leftrightarrow$ (4) ist offensichtlich, (4) $\Leftrightarrow$ (3) gilt wegen $\gamma_C \leq \eta$ (siehe voriges Beispiel), und (4) $\Leftrightarrow$ (5) folgt bereits aus Korollar 4.2.16, da (5) besagt, dass die Abbildung γ_C außenbindend bzgl. der Hüllenoperation η ist.

Ist speziell $\gamma_C(x) = (x \supset \bot_C) \supset \bot_C$, so ergibt sich die bekannte *Booleanisierung* der Heyting-Algebra C: In Heyting-Algebren gilt für das Pseudokomplement $\neg z = z \supset \bot$ nämlich $\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$, d. h. γ_C ist in diesem Fall $\wedge$-erhaltend. Wegen $b = \gamma_C(\bot) = (\bot \supset \bot) \supset \bot = \bot$ ist dann $\gamma_C(x) = (x \supset b) \supset b$, aufgrund der gezeigten Äquivalenzen der Hüllenbereich C_γ also ein Boolescher Verband.

Beispiel 5.3.20. Sei C eine Hüllenstruktur. Wir zeigen:

> *Ist C ein Boolescher Verband (was insbesondere für klassische Hüllenstrukturen C der Fall ist), so ist $\wedge_C$ genau dann stetig (d. h. γ_C $\wedge$-erhaltend), wenn für ein festes $b \in C$*
>
> $$\gamma_C(x) = x \vee b$$
>
> *für alle $x \in C$ gilt. In diesem Fall ist auch C_γ ein Boolescher Verband und $b = \bot_{C_\gamma} = \gamma_C(\bot_C)$. Ist darüber hinaus $\bot_C$ abgeschlossen (d. h. $b = \bot_C$), so folgt bereits $\gamma_C = \mathrm{id}_C$.*

Sei also C ein Boolescher Verband. Gilt $\gamma_C(x) = x \vee b$ für alle $x \in C$, so berechnet man $\gamma_C(\bot) = b$ und $\gamma_C(x \wedge y) = (x \wedge y) \vee b = (x \vee b) \wedge (y \vee b) = \gamma_C(x) \wedge \gamma_C(y)$, d. h. γ_C erhält binäre Infima.

Sei nun umgekehrt γ_C $\wedge$-erhaltend. Es bezeichne $\neg x = x \supset \bot$ das Komplement von x in C, und wie in den vorigen beiden Beispielen sei $b = \bot_{C_\gamma}$ und $\eta(x) = (x \supset b) \supset b$. Dann gilt

$$\eta(x) = \neg(\neg x \vee b) \vee b = x \vee b$$

und außerdem $\eta(\gamma_C(x)) = \gamma_C(x) \vee b = \gamma_C(x)$ für alle $x \in C$. Es ist also $\eta \circ \gamma_C = \gamma_C$ und damit nach dem vorigen Beispiel sowohl $\gamma_C = \eta$ als auch C_γ ein Boolescher Verband.

5.3.3 σ-Vollstetigkeit für $(\sigma;+)$-residuierte Abbildungen

Wir kommen nun zu einer gemeinsamen Verallgemeinerung der einstelligen Fälle $(+;+)$ und $(-;+)$ auf den mehrstelligen Fall $(\sigma;+)$. Entsprechend verwenden wir anstelle der Vollstetigkeit bzw. Co-Vollstetigkeit allgemeiner die σ-Vollstetigkeit.

Proposition 5.3.21. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine σ-residuale Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen. Eine $(\sigma;+)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann σ-vollstetig, wenn es ein $(\sigma;+)$-residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ gibt mit*

$$f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}_\sigma C.$$

In diesem Fall ist φ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$.

Beweis. Sei $f\colon C \to D$ $(\sigma;+)$-residuiert. Ist f σ-vollstetig, so ist $\overrightarrow{f}$ $(\sigma;+)$-residuiert nach Theorem 5.3.11 und man erhält

$$\overset{\leftrightarrows}{f} \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \gamma_D \circ f \circ \gamma_C \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = f \restriction \mathcal{S}_\sigma C.$$

Gilt umgekehrt $f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}_\sigma C$ für ein $(\sigma;+)$-residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$, so folgt einerseits wegen

$$\varphi \circ \gamma_C^\bullet \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \gamma_D^\bullet \circ \gamma_D^\circ \circ \varphi \circ \gamma_C^\bullet \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \gamma_D^\bullet \circ f \restriction \mathcal{S}_\sigma C$$

und Proposition 5.3.13 die Stetigkeit von f (sowie die Eindeutigkeit von φ). Andererseits gilt auch

$$\gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \gamma_D \circ \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}_\sigma C = f \restriction \mathcal{S}_\sigma C,$$

also ist f σ-vollstetig. □

Proposition 5.3.22. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine σ-residuale Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Eine $(\sigma;+)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann σ-vollstetig, wenn f σ-stetig ist und*

$$f = (\overset{\leftrightarrows}{f})^{\sim}_{(\sigma;+)}$$

erfüllt.

Beweis. Sei $f\colon C \to D$ $(\sigma;+)$-residuiert. Ist f σ-vollstetig, so ist f auch σ-stetig, und es gilt

$$\overset{\leftrightarrows}{f} \restriction \mathcal{S}_\sigma C = f \restriction \mathcal{S}_\sigma C,$$

also $f = (\overset{\leftrightarrows}{f})^{\sim}_{(\sigma;+)}$ nach Theorem 3.1.19.

Ist umgekehrt f σ-stetig und $f = (\overset{\leftrightarrows}{f})^{\sim}_{(\sigma;+)}$, so ist $\overrightarrow{f}$ $(\sigma;+)$-residuiert und

$$\overset{\leftrightarrows}{f} \restriction \mathcal{S}_\sigma C = (\overset{\leftrightarrows}{f})^{\sim}_{(\sigma;+)} \restriction \mathcal{S}_\sigma C = f \restriction \mathcal{S}_\sigma C,$$

nach Proposition 5.3.21 also f σ-vollstetig. □

Als nützliches Kriterium für den Beweis der anschließenden Proposition (und als gemeinsame Verallgemeinerung von Lemma 5.2.15 und Lemma 5.2.58) halten wir fest:

Lemma 5.3.23. *Es sei C σ-residual, $B = (B_1, \dots, B_n)$ ein σ-Erzeuger von C, und es seien $f_1, f_2 \colon C \to D$ stetige Abbildungen. Sind $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ $(\sigma; +)$-residuiert und stimmen f_1 und f_2 auf B überein, so ist $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_2}$.*

Beweis. Sei $f_1 \restriction B = f_2 \restriction B$, und seien $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ $(\sigma; +)$-residuiert. Dann sind $\overrightarrow{f_1} \circ \gamma_C^\bullet$ und $\overrightarrow{f_2} \circ \gamma_C^\bullet$ $(\sigma; +)$-residuiert, und mit der Stetigkeit von f_1, f_2 folgt

$$\overrightarrow{f_1} \circ \gamma_C^\bullet \restriction B = \gamma_D^\bullet \circ f_1 \restriction B = \gamma_D^\bullet \circ f_2 \restriction B = \overrightarrow{f_2} \circ \gamma_C^\bullet \restriction B.$$

Da $(\gamma_{C_1}^\bullet[B_1], \dots, \gamma_{C_n}^\bullet[B_n])$ nach Voraussetzung ein σ-Erzeuger von C_γ ist, erhält man nach Proposition 2.2.8 schließlich $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_2}$. □

Proposition 5.3.24. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine σ-residuale Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Für jede $(\sigma; +)$-residuierte Abbildung $\varphi \colon C_\gamma \to D_\gamma$ ist $(\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(\sigma;+)}$ eine σ-vollstetige und $(\sigma; +)$-residuierte Abbildung mit*

$$\overrightarrow{(\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(\sigma;+)}} = \varphi.$$

Beweis. Sei $\varphi \colon C_\gamma \to D_\gamma$ $(\sigma; +)$-residuiert. Die Abbildung $(\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(\sigma;+)}$ ist $(\sigma; +)$-residuiert nach Theorem 3.1.19, und es gilt

$$(\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(\sigma;+)} \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}_\sigma C.$$

Daraus folgt einerseits mit Proposition 5.3.21, dass $(\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(\sigma;+)}$ σ-vollstetig ist. Da $(\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(\sigma;+)}$ und $\overleftarrow{\varphi}$ insbesondere stetig sind, ergibt sich andererseits mit Lemma 5.3.23

$$\overrightarrow{(\overleftarrow{\varphi})^\sim_{(\sigma;+)}} = \overrightarrow{\overleftarrow{\varphi}} = \varphi.$$ □

Im speziellen Fall residuierter Hüllenstrukturen ist jede σ-vollstetige, $(\sigma; +)$-residuierte Abbildung bereits bindend:

Lemma 5.3.25. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine* residuierte *Hüllenstruktur. Eine $(\sigma; +)$-residuierte Abbildung von C in D ist genau dann bindend, wenn sie σ-vollstetig ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist mit $f \colon C \to D$ auch $\gamma_D \circ f$ $(\sigma; +)$-residuiert, also f genau dann außenbindend, wenn $\gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = f \restriction \mathcal{S}_\sigma C$ gilt. □

Insgesamt ergibt sich aus den vorigen Fakten die folgende bijektive Korrespondenz für $(\sigma; +)$-residuierte Abbildungen.

Theorem 5.3.26. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine σ-residuale Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{ccres}_{(\sigma;+)}(C; D)$ *aller σ-vollstetigen, $(\sigma; +)$-residuierten Abbildungen von C in D und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;+)}(C_\gamma; D_\gamma)$ *aller $(\sigma; +)$-residuierten Abbildungen von C_γ in D_γ*

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Funktionen

$$f \mapsto \overrightarrow{f} \quad \textit{und} \quad \varphi \mapsto (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(\sigma;+)}.$$

Ist D außerdem residuiert, *so ist* $(\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(\sigma;+)} = \overleftarrow{\varphi}$ *für alle* $\varphi \in \mathsf{res}_{(\sigma;+)}(C_\gamma; D_\gamma)$ *und es gilt dann* $\mathsf{ccres}_{(\sigma;+)}(C; D) = \mathsf{bres}_{(\sigma;+)}(C; D)$.

Beweis. Mit Proposition 5.3.22 und Proposition 5.3.24. Den Zusatz sieht man wie folgt: Nach Voraussetzung ist γ_{C_i} für jedes $i \in \underline{n}$ in der i-ten Variablen $(\sigma_i; \sigma_i)$-residuiert. Ist nun D residuiert, d. h. γ_D° $(+;+)$-residuiert, so ist für jedes $(\sigma;+)$-residuierte φ auch $\overleftarrow{\varphi}$ $(\sigma;+)$-residuiert. Der Rest ergibt sich mit Lemma 5.3.25. □

Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall $\sigma = [+]$ und werden sehen, dass sich die früheren Ergebnisse für einstellige residuierte Abbildungen fast wörtlich auf mehrstellige residuierte Abbildungen übertragen lassen. Es sei daran erinnert, dass bei den verwendeten Notationen auf die Angabe der Signatur $(\sigma; \tau) = ([+]; +)$ in der Regel verzichtet wird.

Korollar 5.3.27. *Sei $C = (C_1, \ldots, C_n)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_{(C;D)} &\colon \mathsf{cres}(C; D) \to \mathsf{res}(C_\gamma; D_\gamma), \quad f \mapsto \overrightarrow{f}, \\ \Psi = \Psi_{(C;D)} &\colon \mathsf{res}(C_\gamma; D_\gamma) \to \mathsf{cres}(C; D), \quad \varphi \mapsto \tilde{\overleftarrow{\varphi}} = (\overleftarrow{\varphi})^{\sim} = (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{([+];+)} \end{aligned}$$

bilden eine Adjunktion (Φ, Ψ), wobei Φ surjektiv und Ψ injektiv ist.

Beweis. Die Isotonie von Φ und Ψ folgt aus Proposition 4.2.7 und Theorem 3.1.19. Für jedes stetige und residuierte $f\colon C \to D$ ist außerdem $f \leq \overset{\leftrightarrows}{f}$ und damit

$$f = \tilde{f} \leq \tilde{\overset{\leftrightarrows}{f}}$$

nach Theorem 3.1.19. Die übrigen Behauptungen ergeben sich mit Proposition 5.3.24. □

Genau wie im einstelligen Fall erhält man somit durch $\Psi_{(C;D)} \circ \Phi_{(C;D)}$ eine Hüllenoperation auf $\mathsf{ccres}(C; D) = \mathsf{ccres}_{([+];+)}(C; D)$.

Definition 5.3.28 (Vollstetige Hüllen stetiger, residuierter Abbildungen)**.** $C = (C_1, \ldots, C_n)$ sei eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Für eine stetige, residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ sei

$$\overline{f} := \tilde{\overset{\leftrightarrows}{f}} = (\overset{\leftrightarrows}{f})^{\sim}_{([+];+)} = (\gamma_D \circ f)^{\sim}$$

die $[+]$-*vollstetige* oder einfach *vollstetige Hülle* von f.

Im Fall $n = 1$ stimmt die $[+]$-vollstetige Hülle mit der vollstetigen Hülle einstelliger Abbildungen aus Definition 5.2.17 überein.

Analog zur Verwendung der Bezeichnung $[+]$-vollstetig (siehe Konvention 5.1.2) können wir auch von der $[+]$-vollstetigen Hülle einer einstelligen Abbildung $f\colon \prod C \to D$ sprechen, wenn eigentlich die der mehrstelligen Abbildung $f\colon C \to D$ gemeint ist. Man beachte aber, dass die einstellige vollstetige Hülle von $f\colon \prod C \to D$ im allgemeinen *nicht* identisch ist mit der mehrstelligen vollstetigen Hülle von $f\colon C \to D$, da das Spektrum eines Produktverbands nicht mit dem Produkt der Spektren der einzelnen Faktoren übereinstimmen muss. Insofern ist bei der Notation $\overline{f}$ im folgenden stets entscheidend, ob f als ein- oder mehrstellige Funktion aufgefasst wird.

Korollar 5.3.29. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Die Abbildung $f \mapsto \overline{f}$ ist eine Hüllenoperation auf dem vollständigen Verband $\mathsf{cres}(C; D)$, und der zugehörige Hüllenbereich ist*

$$\mathsf{ccres}(C; D) = \mathsf{cres}(C; D)_\gamma.$$

In diesem werden Suprema somit wie folgt gebildet:

$$\bigvee\nolimits_{\mathsf{ccres}(C;D)} \mathcal{F} = \overline{\bigvee\nolimits_{\mathsf{cres}(C;D)} \mathcal{F}} \qquad (\mathcal{F} \subseteq \mathsf{ccres}(C; D)).$$

Beweis. Nach Proposition 5.3.22 für $\sigma = [+]$ und Korollar 5.3.27. □

Nach Definition ist die vollstetige Hülle $\overline{f}$ einer mehrstelligen stetigen, residuierten Abbildung $f\colon C \to D$ also die kleinste vollstetige und residuierte Abbildung, die über f liegt. Wie für den einstelligen Fall werden jetzt weitere einfache Eigenschaften der vollstetigen Hülle aufgelistet.

Proposition 5.3.30. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Für alle stetigen und residuierten Abbildungen $f, g\colon C \to D$ gilt:*

(a) (i) $f \leq g \Rightarrow \overline{f} \leq \overline{g}$, (ii) $f \leq \overline{f}$, (iii) $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$.

(b) Für alle $x \in \prod C$ ist

$$\begin{aligned}\overline{f}(x) &= \bigvee\nolimits_D (\gamma_D \circ f)[\downarrow_{C_1} x_1 \cap \mathcal{S}C_1, \dots, \downarrow_{C_n} x_n \cap \mathcal{S}C_n] \\ &= \bigvee\nolimits_D \{\, (\gamma_D \circ f)(u) : x \geq_C u \in \textstyle\prod \mathcal{S}^n C \,\}.\end{aligned}$$

(c) $\overline{f} \restriction \mathcal{S}^n C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}^n C$.

(d) $\overrightarrow{\overline{f}} = \overrightarrow{f}$ und $\gamma_D \circ \overline{f} = \gamma_D \circ f$.

Beweis. Mit Theorem 3.1.19 und Korollar 5.3.27. □

Ebenso wie im einstelligen Fall lassen sich mehrstellige vollstetige, residuierte Abbildungen charakterisieren:

Proposition 5.3.31. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen, D eine vollständige Hüllenstruktur und $f\colon C \to D$ residuiert. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist vollstetig (d. h. $[+]$-vollstetig).

(2) f ist stetig und $f = \overline{f}$.

(3) $f = \max\{\, h \in \mathsf{cres}_{([+];+)}(C; D) : \overrightarrow{h} = \overrightarrow{f} \,\}$.

Beweis. Mit Proposition 5.3.22 ergibt sich (1) ⇔ (2), und (2) ⇔ (3) folgt aus Korollar 5.3.27 zusammen mit Proposition 5.2.19. □

Die nächsten beiden Lemmata stellen einen Zusammenhang zwischen den Begriffen im ein- und mehrstelligen Fall her.

Lemma 5.3.32. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und D eine vollständige Hüllenstruktur. Eine $([+]; +)$-residuierte Abbildung $f: C \to D$ ist genau dann $[+]$-vollstetig, wenn f_i^u für alle $u \in \prod \mathcal{S}^n C$ und alle $i \in \underline{n}$ vollstetig ist.*

Beweis. Die Aussage $f \restriction \mathcal{S}^n C = \gamma_D \circ f \restriction \mathcal{S}^n C$ ist gleichbedeutend mit der folgenden: Für alle $u \in \prod \mathcal{S}^n C$ und mindestens ein $i \in \underline{n}$ ist $f_i^u \restriction \mathcal{S}C_i = \gamma_D \circ f_i^u \restriction \mathcal{S}C_i$. Die Behauptung folgt nun mit Theorem 5.3.16. □

Lemma 5.3.33. *Sei $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen, D eine vollständige Hüllenstruktur, und es sei $f: C \to D$ eine stetige, $([+]; +)$-residuierte Abbildung. Dann gilt für alle $u \in \prod \mathcal{S}^n C$ und alle $i \in \underline{n}$*

$$\overline{f}_i^u = \overline{f_i^u}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist die einstellige Abbildung f_i^u stetig und residuiert, und für jedes $v \in \mathcal{S}C_i$ gilt

$$\overline{f}_i^u(v) = \overline{f}(u[i \mapsto v]) = (\gamma_D \circ f)(u[i \mapsto v]) = (\gamma_D \circ f_i^u)(v) = \overline{f_i^u}(v). \qquad \square$$

Wir beschließen diesen Teil mit einem Beispiel zur mehrstelligen Vollstetigkeit, das uns erneut auf die diskreten superalgebraischen Hüllenstrukturen führt.

Beispiel 5.3.34. Sei C eine superalgebraische Hüllenstruktur. Dann ist C insbesondere eine vollständige Heyting-Algebra, und ist $\wedge_C$ stetig (d. h. γ_C $\wedge$-erhaltend), so ist auch der Hüllenbereich C_γ eine vollständige Heyting-Algebra (siehe Beispiel 5.3.18). Nach Proposition 5.3.31 wird dieselbe Heyting-Algebra induziert, falls die zweistellige Operation $\wedge_C$ sogar *vollstetig* (d. h. $(+; +)$-vollstetig) ist. Für welche superalgebraischen Hüllenstrukturen C mit $\wedge$-erhaltendem γ_C ist dies der Fall? Die Antwort ist: Genau für die *diskreten*, denn es gilt

$$\begin{aligned} \wedge_C \ (+;+)\text{-vollstetig} \quad &\iff \quad \gamma_C(u) \wedge \gamma_C(v) = \gamma_C(u \wedge v) = u \wedge v \quad \text{für alle } u, v \in \mathcal{S}C \\ &\iff \quad \gamma_C(u) = u \quad \text{für alle } u \in \mathcal{S}C. \end{aligned}$$

5.3.4 Zusammenfassung für $(\sigma; \tau)$-residuierte Abbildungen

In diesem Kapitel wurden einerseits die wichtigsten Grundbegriffe für $(\sigma; \tau)$-residuierte Abbildungen auf verschiedene Weise charakterisiert. Andererseits wurden, ausgehend von der kanonischen Zuordnung

$$f \mapsto \overrightarrow{f},$$

bijektive Korrespondenzen von geeigneten $(\sigma; \tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen mit allen $(\sigma; \tau)$-residuierten Abbildungen zwischen den zugehörigen Hüllenbereichen etabliert. Wir fassen im folgenden einige dieser Resultate für beliebige Signaturen $(\sigma; \tau) \in \{+, -\}^{n+1}$ zusammen. Dabei legen wir den Schwerpunkt auf eine einheitliche Formulierung und machen an einigen Stellen mehr Voraussetzungen, als eigentlich nötig wären. Mögliche Abschwächungen der Voraussetzungen und weitere Details finden sich in den früheren Ergebnissen, die auch in den Beweisen der zusammenfassenden Theoreme erwähnt werden.

Theorem 5.3.35. *Sei $(C; D)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen. Für jede σ-vollstetige und $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist auch*

$$\overrightarrow{f} : C_\gamma \to D_\gamma$$

eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung, und es gilt

$$(\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = \overrightarrow{f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}}.$$

Beweis. Nach Theorem 5.3.1 (mit Proposition 5.3.8) und Theorem 5.3.11. □

Die σ-Vollstetigkeit einer $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildung f zwischen superalgebraischen Hüllenstrukturen garantiert also, dass ihre kanonische Induzierte wieder $(\sigma;\tau)$-residuiert ist. Das obige Theorem gibt außerdem an, wie die Residuale der induzierten Abbildung auf diejenigen von f zurückgeführt werden können:

$$(\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(c[i \mapsto d]) = \gamma_{C_i}(f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(c[i \mapsto d])) \qquad \text{für alle } c[i \mapsto d] \in \prod C_\gamma[i \mapsto D_\gamma].$$

Falls $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ abgeschlossen ist, kann bei der Berechnung des induzierten Residuals auf diese Hüllen-Bildung verzichtet werden. Daher wird in Theorem 5.3.42 am Ende dieser Zusammenfassung noch ausführlich angegeben, welche Eigenschaften von $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ die σ-Vollstetigkeit von f aufgrund der früheren Charakterisierungen der Grundbegriffe impliziert.

Wir erwähnen an dieser Stelle noch eine leichte hinreichende und auch notwendige Bedingung dafür, dass aus einer gegebenen $(\sigma;\tau)$-residuierten Familie über Hüllenstrukturen bereits durch Restriktion auf die zugehörigen Hüllenbereiche wieder eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie entsteht.

Proposition 5.3.36. *Sei $(C; D)$ eine Familie beliebiger Hüllenstrukturen und $f\colon C \to D$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung.*

Ist f und für jedes $i \in \underline{n}$ auch $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}\colon C[i \mapsto D] \to C_i$ abgeschlossen, so ist $\overrightarrow{f} : C_\gamma \to D_\gamma$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung mit

$$\overrightarrow{f}(c) = f(c) \quad \textit{und} \quad (\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(c[i \mapsto d]) = f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}(c[i \mapsto d])$$

für alle $c \in \prod C_\gamma$, $d \in D_\gamma$ und alle $i \in \underline{n}$, insbesondere also $(\overrightarrow{f})^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = \overrightarrow{f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}}$.

Offensichtlich gilt hiervon auch die Umkehrung.

Beweis. Sei $(f, g_1, \ldots, g_n)$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie über $(C; D)$ mit abgeschlossenen Komponenten. Für jedes $i \in \underline{n}$ und alle $c \in \prod C_\gamma$, $d \in D_\gamma$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n) \leq^\tau d \quad &\iff \quad f(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n) \leq^\tau d \\
&\iff \quad c_i \leq^{\sigma_i} g_i(c_1, \ldots, d, \ldots, c_n) \\
&\iff \quad c_i \leq^{\sigma_i} \overrightarrow{g_i}(c_1, \ldots, d, \ldots, c_n),
\end{aligned}$$

also ist auch $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_n})$ eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie, deren induzierte Komponenten wegen der Abgeschlossenheit wie angegeben gebildet werden. □

Für adjungierte Paare (f, g) zwischen Hüllenstrukturen gilt: Die Abbildungen f und g sind genau dann abgeschlossen, wenn f stetig und abgeschlossen ist. Im Fall $(\sigma;\tau) = (+;+)$ erhält man das Kriterium aus Proposition 5.3.36 somit bereits als denjenigen Spezialfall von Theorem 5.2.2, in dem die stetige residuierte Abbildung f außerdem abgeschlossen ist.

Die nächste Proposition erläutert, wie man im Falle superalgebraischer Hüllenstrukturen durch die kanonische Fortsetzung $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ von $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenbereichen auf die σ-Vollstetigkeit geführt wird.

Proposition 5.3.37. *Sei $(C; D)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen, und C sei σ-residual. Eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$ ist genau dann σ-vollstetig, wenn es ein $(\sigma;\tau)$-residuiertes $\varphi\colon C_\gamma \to D_\gamma$ gibt mit*

$$f \restriction \mathcal{S}_\sigma C = \overleftarrow{\varphi} \restriction \mathcal{S}_\sigma C.$$

Dabei ist φ eindeutig bestimmt durch $\varphi = \overrightarrow{f}$.

Beweis. Nach Korollar 5.3.3 (mit Proposition 5.3.8) und Proposition 5.3.21. □

Unter geeigneten Voraussetzungen sind σ-vollstetige Abbildungen bereits bindend:

Proposition 5.3.38. *Es sei $(C; D)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen, und im Fall $\tau = +$ sei D* residuiert. *Dann gilt für jede $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung $f\colon C \to D$*

$$f \ \sigma\text{-vollstetig} \iff f \ \text{bindend.}$$

Beweis. Nach Proposition 5.3.8 und Lemma 5.3.25. □

Zur Formulierung des zentralen Resultats führen wir neben der Pfeil-Schreibweise noch eine weitere Notation ein.

Definition 5.3.39 (Kanonisch induzierte Abbildungen)**.** Sei $(C; D)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen und $(\sigma;\tau)$ eine Signatur. Die Abbildung

$$\mathfrak{L}^{(\sigma;\tau)}\colon \mathsf{ccres}_{(\sigma;\tau)}(C; D) \to \mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(C_\gamma; D_\gamma)$$

sei definiert durch

$$\mathfrak{L}^{(\sigma;\tau)}(f) = \overrightarrow{f}.$$

Mit dieser Schreibweise gilt nach Theorem 5.3.35 für jede Familie $(C; D)$ superalgebraischer Hüllenstrukturen und alle $f \in \mathsf{ccres}_{(\sigma;\tau)}(C; D)$

$$\big(\mathfrak{L}^{(\sigma;\tau)}(f)\big)^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = \mathfrak{L}^{(\sigma;\tau)^{-i}}\big(f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}\big).$$

Als wichtigstes Resultat dieses Kapitels können die gewünschten bijektiven Korrespondenzen nun folgendermaßen zusammengefasst werden:

Theorem 5.3.40. *Sei $(C; D)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen, und C sei σ-residual. Dann gilt*

$$\mathsf{ccres}_{(\sigma;\tau)}(C; D) \cong \mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(C_\gamma; D_\gamma),$$

und die Abbildung $\mathfrak{L}^{(\sigma;\tau)}$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen diesen beiden vollständigen Verbänden mit der Inversen

$$(\mathfrak{L}^{(\sigma;\tau)})^{-1} = (\overleftarrow{\varphi})^{\sim}_{(\sigma;\tau)}.$$

Ist $\tau = -$ oder D residuiert, so ist $(\mathfrak{L}^{(\sigma;\tau)})^{-1} = \overleftarrow{\varphi}$.

Beweis. Nach Theorem 5.3.26 und Theorem 5.3.4. □

Die oben beschriebene Isomorphie von $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(C_\gamma; D_\gamma)$ und $\mathsf{ccres}_{(\sigma;\tau)}(C; D)$ gilt insbesondere für den Fall $n = 0$. Da für Elemente von D, aufgefasst als Abbildung $\mathbf{1} \to D$, die σ-Vollstetigkeit mit der Abgeschlossenheit identisch ist (siehe Lemma 4.2.24), besagt die Isomorphie in diesem Fall einfach, dass der Hüllenbereich D_γ genau aus den abgeschlossenen Elemente von D besteht.

Bemerkung 5.3.41. In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass die $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen superalgebraischen Verbänden in Bijektion zu $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelationen zwischen den zugrundeliegenden Spektren stehen. Über diese Bijektion können auch diejenigen Relationen zwischen Spektren bestimmt werden, die mit *σ-vollstetigen* $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen (gegebenenfalls residualen) superalgebraischen *Hüllenstrukturen* korrespondieren. Durch die Kombination von Theorem 3.2.16 mit Theorem 5.3.40 ergibt sich dann ein einheitliches und sehr allgemeines Resultat zur Darstellung von $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien über Hüllenbereichen superalgebraischer Hüllenstrukturen durch geeignete Relationen.

Wir verzichten auf die Formulierung eines solchen Darstellungssatzes, werden aber im nächsten Kapitel einen entsprechenden Satz für den Spezialfall der *klassischen* Hüllenstrukturen und somit für *Hüllenräume* beweisen (siehe Theorem 6.2.8). Analog ließe sich auch ein Darstellungssatz für *monotone* Hüllenstrukturen entwickeln (und damit für Hüllenräume, die auf geeignete Weise noch mit einer Quasiordnung versehen sind), worauf wir in dieser Arbeit aus Platzgründen jedoch nicht näher eingehen.

Eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie $(f, g_1, \ldots, g_n)$ über superalgebraischen Hüllenstrukturen $C_1, \ldots, C_n$ und D ist wegen

$$g_i = f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$$

durch ihren Kopf f bereits eindeutig festgelegt. Ist der Kopf f der Familie σ-vollstetig, so erhält man laut Theorem 5.3.35 durch

$$(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_n})$$

eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Familie über den Hüllenbereichen $(C_1)_\gamma, \ldots, (C_n)_\gamma$ und D_γ. Wie eingangs bereits angekündigt, stellen wir nun unter den Voraussetzungen von Theorem 5.3.40 zusammen, welche Eigenschaften sich durch die σ-Vollstetigkeit von f für die Residuale g_i ergeben (per Fallunterscheidungen nach den Signaturen und den bekannten Zusammenhängen der Grundbegriffe). Damit werden insbesondere Signaturen angegeben, für die g_i abgeschlossen ist, $\overrightarrow{g_i}$ also einfach durch Restriktion aus g_i entsteht. Ebenso erwähnen wir einige wichtige Fälle, in denen die σ-Vollstetigkeit schon impliziert, dass f bindend ist, da wir dann auch $\overrightarrow{f}$ durch Restriktion aus f erhalten.

Theorem 5.3.42. *Sei $(C; D)$ eine Familie superalgebraischer Hüllenstrukturen, $(\sigma;\tau)$ eine beliebige Signatur und C σ-residual. Es sei*

$$f \in \mathsf{ccres}_{(\sigma;\tau)}(C; D).$$

Alle in eckigen Klammern angegebenen Folgerungen benutzen die zusätzliche Voraussetzung: [Sei D residuiert.]

Für alle $i, k \in \underline{n}$ mit $i \neq k$ gelten dann für das i-te $(\sigma;\tau)$-Residual $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ die in der Tabelle 5.1 aufgeführten Eigenschaften. Im Falle der nachfolgenden Signaturen erhält man somit:

(a) Für $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ ist f insbesondere stetig [bindend]*, und $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ ist abgeschlossen* [außenbindend]*. Dies gilt allgemeiner für alle $(\sigma;\tau)$ mit $\sigma_i = + = \tau$.*

(b) Für $(\sigma;\tau) = ([+];+)^{-i}$ ist f bindend und $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ innenbindend.

(c) Für $(\sigma;\tau) = ([+];-)$ ist f bindend und $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ bindend.

Die Voraussetzungen dieses Theorems können in einigen Fällen deutlich abgeschwächt werden. Beispielsweise gilt die Aussage (c) bereits für beliebige Hüllenstrukturen, wenn die Voraussetzung $f \in \mathsf{ccres}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$ durch $f \in \mathsf{bres}_{(\sigma;\tau)}(C;D)$ ersetzt wird.

τ	σ_i	σ_k	$f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ ist ...
$+$	$+$	$+$	abgeschlossen [außenbindend], [in der k-ten Variablen bindend]
$+$	$+$	$-$	abgeschlossen [außenbindend]
$+$	$-$	$+$	[in der k-ten Variablen innenbindend]
$+$	$-$	$-$	–
$-$	$+$	$+$	außenbindend, in der i-ten Variablen bindend, in der k-ten Variablen bindend
$-$	$+$	$-$	außenbindend, in der i-ten Variablen bindend
$-$	$-$	$+$	in der i-ten Variablen innenbindend, in der k-ten Variablen innenbindend
$-$	$-$	$-$	in der i-ten Variablen innenbindend

Tabelle 5.1: Eigenschaften des i-ten $(\sigma;\tau)$-Residuals von f in Theorem 5.3.42

Beweis. Wir schreiben abkürzend f_i für $f^{(i)}_{(\sigma;\tau)}$ $(i \in \underline{n})$. Seien $i, k \in \underline{n}$, $i \neq k$, und sei $f\colon C \to D$ σ-vollstetig und $(\sigma;\tau)$-residuiert. Aufgrund der Definition ist dann f_i in der i-ten Variablen $(-\tau;-\sigma_i)$-residuiert, und das Residual entsteht aus f in der i-ten Variablen. In der k-ten Variablen ist f_i $(\sigma_k;-\sigma_i)$-residuiert, und das Residual entsteht aus f_k in der i-ten Variablen. Siehe Theorem 2.2.13 für eine genaue Formulierung. Analoges gilt natürlich für f_k.

In einer Fallunterscheidung werden nun insbesondere Theorem 5.2.2, Theorem 5.2.8, Proposition 5.2.41, sowie Lemma 4.2.25, Lemma 4.2.27 und Theorem 4.2.28 verwendet.

(I) $\tau = +$. Nach Voraussetzung ist f insbesondere stetig. [Nach Lemma 5.3.25 ist f bindend.]

(1) $\sigma_i = +$. Dann ist f in der i-ten Variablen $(+;+)$-residuiert und stetig [bindend]. Somit ist f_i in der i-ten Variablen $(-;-)$-residuiert und abgeschlossen [außenbindend], also f_i abgeschlossen [außenbindend]. Man beachte, dass f_i damit in der k-ten Variablen noch nicht abgeschlossen sein muss.

(i) $\sigma_k = +$. Analog zu f_i ist f_k abgeschlossen [außenbindend]. In der k-ten Variablen ist f_i $(+;-)$-residuiert, und das Residual entsteht aus f_k in der i-ten Variablen. [Also ist f_i in der k-ten Variablen innenbindend und insgesamt in der k-ten Variablen bindend.]

(ii) $\sigma_k = -$. In der k-ten Variablen ist f_k $(-;+)$-residuiert. In der i-ten Variablen ist f_k $(+;+)$-residuiert, und das Residual entsteht aus f_i in der k-ten Variablen. [Demnach ist f_k in der i-ten Variablen innenbindend.]

(2) $\sigma_i = -$. Dann sind f und f_i in der i-ten Variablen $(-;+)$-residuiert.

(i) $\sigma_k = +$. Symmetrisch zum Fall (1)(ii). [Also ist f_i in der k-ten Variablen innenbindend].

(ii) $\sigma_k = -$. Dann ist f_i in der k-ten Variablen $(-;+)$-residuiert.

(II) $\tau = -$. Nach Proposition 5.3.8 ist f bindend.

(1) $\sigma_i = +$. Dann ist f in der i-ten Variablen $(+;-)$-residuiert und bindend [bindend]. Somit ist f_i in der i-ten Variablen $(+;-)$-residuiert und bindend, also f_i außenbindend und in der i-ten Variablen bindend.

(i) $\sigma_k = +$. Analog zu f_i ist f_k außenbindend. In der k-ten Variablen ist f_i $(+;-)$-residuiert, und das Residual entsteht aus f_k in der i-ten Variablen. Also ist f_i in der k-ten Variablen innenbindend und insgesamt in der k-ten Variablen bindend.

(ii) $\sigma_k = -$. Dann ist f in der k-ten Variablen $(-;-)$-residuiert und bindend, also f_k in der k-ten Variablen $(+;+)$-residuiert und innenbindend. Auch in der i-ten Variablen ist f_k $(+;+)$-residuiert, und das Residual entsteht aus f_i in der k-ten Variablen. Demnach ist f_k in der i-ten Variablen innenbindend.

(2) $\sigma_i = -$. Dann ist f in der i-ten Variablen $(-;-)$-residuiert und bindend. Somit ist f_i in der i-ten Variablen $(+;+)$-residuiert und innenbindend.

(i) $\sigma_k = +$. Symmetrisch zum Fall (1)(ii). Also ist f_i in der k-ten Variablen innenbindend.

(ii) $\sigma_k = -$. Dann ist f_i in der k-ten Variablen $(-;+)$-residuiert.

Insgesamt ergibt sich damit Tabelle 5.1. Die Folgerungen (a)–(c) ergeben sich aus der Tabelle zusammen mit Theorem 4.2.28. □

6 Hüllenräume

In diesem Kapitel wird die bisher entwickelte Theorie gewinnbringend auf verschiedene Spezialfälle angewendet. Die Ergebnisse zu $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien zwischen Hüllenstrukturen aus dem vorigen Kapitel gelten insbesondere für klassische Hüllenstrukturen, also solchen der Form $(\mathfrak{P}X, \Gamma_X)$ für eine Menge X. Aus Kapitel 3 wissen wir, dass sich alle $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien zwischen Potenzmengenverbänden durch Relationen zwischen den zugehörigen Grundmengen realisieren lassen. Nun korrespondieren außerdem klassische Hüllenstrukturen bijektiv mit Hüllenräumen – die früheren Resultate können also insgesamt auf Relationen zwischen Hüllenräumen übertragen werden.

Auf diese Weise gelangen wir zum einen zur kanonischen Realisierung von $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien über Hüllenverbänden mit Hilfe geeigneter Relationen zwischen Hüllenräumen. Zum anderen resultieren aus den Grundbegriffen für $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildungen auch entsprechende Grundbegriffe für Relationen. Das liefert für die verschiedenen Signaturen die wichtigen Begriffe stetiger, vollstetiger bzw. abgeschlossener Relationen und außerdem die sogenannten Bindungen zwischen Hüllenräumen. Einige dieser Begriffe erweisen sich als natürliche Verallgemeinerungen oder neue systematische Herleitungen bereits bekannter Konzepte. Beispielsweise ist die Stetigkeit von Funktionen zwischen Hüllenräumen in unserem Sinne dasselbe wie diejenige im topologischen Sinne, und binäre Bindungen zwischen geeigneten Hüllenräumen sind gerade die aus der Formalen Begriffsanalyse bekannten Bindungen zwischen Kontexten.

Eine besondere Stellung unter den Hüllenräumen haben die residuierten Hüllenräume, weil sie genau den (Abschnittsräumen von) quasigeordneten Mengen entsprechen. Dies ermöglicht, sämtliche neuen Grundbegriffe für Relationen zwischen Hüllenräumen auch auf Relationen zwischen quasigeordneten Mengen zu übertragen, und liefert insbesondere einen interessanten Zusammenhang mit den aus Kapitel 3 bekannten Abschnittsrelationen.

Vor diesem Hintergrund ist es nützlich, nach ein paar elementaren Definitionen zu Beginn des Kapitels zunächst einige (überwiegend bekannte) Tatsachen zu Hüllenräumen und quasigeordneten Mengen in der bisher entwickelten Terminologie zu formulieren. Im Anschluss werden dann mittels verallgemeinerter Axialitäten die wichtigsten Grundbegriffe für Relationen zwischen Hüllenräumen eingeführt und einige Theoreme für Hüllenstrukturen auf diesen Fall angewendet. Danach interessiert uns hauptsächlich die Signatur $(\sigma;\tau) = ([+];+)$. Wir charakterisieren die stetigen und vollstetigen Relationen und untersuchen die vollstetige Hülle von stetigen Relationen. Abschließend werden mit Hilfe von Polaritäten auch die erwähnten Bindungen definiert und auf verschiedene Weise beschrieben.

6.1 Grundlagen

Zur Vorbereitung werden in diesem Abschnitt einige grundlegende Definitionen und Fakten zu Hüllenräumen zusammengestellt. Diese sind zwar zu großen Teilen aus der Literatur bekannt, wir nutzen aber die Gelegenheit, sie in die Theorie der Hüllenstrukturen sowie der Axialitäten aus den vorigen Kapiteln einzuordnen. Für eine umfassende Übersicht zu Hüllenräumen verweisen wir auf [36], und der Zusammenhang von (topologischen) Hüllenräumen und quasigeordneten Mengen wird unter anderem in [30] ausführlich beschrieben.

6.1.1 Grundbegriffe für Hüllenräume

Klassische Hüllenstrukturen werden gewöhnlich als Hüllenräume behandelt:

Definition 6.1.1 (Hüllenräume)**.** Ein *Hüllenraum* $X = (A, \Gamma)$ besteht aus einer Menge A und einem *Hüllenoperator* Γ auf A (d. h. einer Hüllenoperation auf $\mathfrak{P}A$, siehe Definition 1.2.23). Wie üblich sei $|X| = A$ die zugrundeliegende Menge der Struktur X, und der Hüllenoperator Γ von X werde mit Γ_X bezeichnet.

Sei $X = (|X|, \Gamma_X)$ ein Hüllenraum. Wir schreiben $\bar{\mathfrak{P}}X := (\mathfrak{P}|X|, \Gamma_X)$ für die durch X erzeugte klassische Hüllenstruktur, es ist also $\gamma_{\bar{\mathfrak{P}}X} = \Gamma_X$. Der *Abschluss* (die *Hülle*) einer Menge $A \subseteq X$ wird im folgenden meistens durch

$$\overline{A} := \Gamma_X(A)$$

gekennzeichnet, sofern der Hüllenraum X aus dem Zusammenhang hervorgeht. Außerdem sei

$$\mathcal{C}X := \Gamma_X[\mathcal{P}X]$$

das zu X gehörende *Hüllensystem auf* $|X|$ (siehe Definition 1.2.26). Aufgrund der Bijektion zwischen Hüllenoperationen und Hüllensystemen nach Proposition 1.2.27 lässt sich ein Hüllenraum X auch durch ein Hüllensystem auf seiner Grundmenge beschreiben, also in der Form $X = (|X|, \mathcal{C}X)$ angeben.

Es sei an dieser Stelle an die Konvention 1.2.3 erinnert, derzufolge wir auch für Hüllenräume X statt $x \in |X|$, $A \subseteq |X|$, $\mathcal{P}|X|$ und ähnlichen Ausdrücken einfacher $x \in X$, $A \subseteq X$ und $\mathcal{P}X$ etc. schreiben.

Lemma 6.1.2. *Man erhält eine Bijektion zwischen Hüllenräumen und klassischen Hüllenstrukturen, indem jedem Hüllenraum $X = (|X|, \Gamma_X)$ die klassische Hüllenstruktur*

$$\bar{\mathfrak{P}}X = (\mathfrak{P}X, \Gamma_X) = (\mathcal{P}X, \subseteq, \Gamma_X)$$

zugeordnet wird. □

Definition 6.1.3 (Hüllenverband)**.** Für einen Hüllenraum X nennen wir den vollständigen Verband

$$\mathfrak{C}X := (\mathcal{C}X, \subseteq)$$

der abgeschlossenen Mengen den *Hüllenverband* von X. Offensichtlich ist $\mathfrak{C}X$ der Hüllenbereich der von X erzeugten klassischen Hüllenstruktur, also

$$\mathfrak{C}X = (\bar{\mathfrak{P}}X)_\gamma.$$

Supremum bzw. Infimum von $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}X$ in $\mathfrak{C}X$ sind gegeben durch

$$\bigwedge \mathcal{X} = \bigcap \mathcal{X} \quad \text{und} \quad \bigvee \mathcal{X} = \overline{\bigcup \mathcal{X}}.$$

Mit Hilfe der Korrespondenz zwischen Hüllenräumen und klassischen Hüllenstrukturen übertragen wir die bisher betrachteten Eigenschaften von Hüllenstrukturen auf Hüllenräume:

Definition 6.1.4 (Eigenschaften von Hüllenräumen)**.** Ein Hüllenraum X heißt

residuiert, *residual*, *differenziert*, *diskret* bzw. *reduziert*,

falls die klassische (und damit insbesondere superalgebraische) Hüllenstruktur $\bar{\mathfrak{P}}X$ die entsprechende Eigenschaft besitzt (siehe die Definitionen 4.1.7 und 4.1.12).

Ein residuierter Hüllenraum wird auch *Alexandroff-Raum* (oder *A-Raum*) genannt. Unter einer *Alexandroff-Topologie* (oder *A-Topologie*) versteht man ein Hüllensystem auf einer Menge, welches nicht nur gegen beliebige Durchschnitte, sondern auch gegen beliebige Vereinigungen abgeschlossen ist.

Notation 6.1.5 (Familien-Schreibweisen für Hüllenräume)**.** Ist $X = (\, X_i : i \in I\,)$ eine Familie von Hüllenräumen, so sei analog zu den Bezeichnungen für Familien von Hüllenstrukturen

$$\Gamma_X = (\, \Gamma_{X_i} : i \in I\,).$$

Entsprechend werden die Notationen $\Gamma_X^\bullet$ und Γ_X° von denen für Hüllenstrukturen übernommen.

Definition 6.1.6 (σ-residuale Familien von Hüllenräumen)**.** Sei $\sigma \in \{+,-\}^n$. Eine Familie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ von Hüllenräumen heißt *σ-residual*, falls $\bar{\mathfrak{P}}^n X = (\bar{\mathfrak{P}}X_1, \ldots, \bar{\mathfrak{P}}X_n)$ eine σ-residuale Familie ist. Das heißt, dass für jedes $i \in \underline{n}$ im Fall $\sigma_i = -$ der Hüllenraum X_i residual ist.

Der grundlegende Zusammenhang zwischen Hüllenräumen und quasigeordneten Mengen wird durch die *Spezialisierung* hergestellt:

Definition 6.1.7 (Spezialisierungsordnung)**.** Für einen Hüllenraum X sei die Relation $\leq_X \subseteq |X| \times |X|$, die *Spezialisierungsordnung* (oder kurz: *Spezialisierung*) *von* X, definiert durch

$$\begin{aligned} y \leq_X x \quad :&\iff \quad y \in \Gamma_X(\{x\}) \\ &\iff \quad \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}} \\ &\iff \quad (\forall A \in \mathcal{C}X)(x \in A \Rightarrow y \in A). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\leq_X$ stets eine Quasiordnung auf X, im allgemeinen aber keine Ordnung. Die zugehörige quasigeordnete Menge wird mit

$$\mathfrak{Q}X = (|X|, \leq_X)$$

bezeichnet und auch *Spezialisierung* von X genannt.

Konvention 6.1.8 (Schreibweisen für die Spezialisierung)**.** Innerhalb von ordnungstheoretischen Notationen kennzeichnen wir die Spezialisierung $\mathfrak{Q}X$ eines Hüllenraums X meistens nur mit X. So schreiben wir beispielsweise $\downarrow_X$ statt $\downarrow_{\mathfrak{Q}X}$, und bereits nach Definition ist $\leq_{\mathfrak{Q}X} = \leq_X$.

Definition 6.1.9 (Punktabschlüsse)**.** Ist X ein Hüllenraum, so bezeichne $\mathsf{p}_X \colon |X| \to \mathcal{C}X$ die Abbildung, die jedem $x \in X$ den Punktabschluss

$$\mathsf{p}_X(x) := \overline{\{x\}} = \Gamma_X(\{x\})$$

zuordnet. Nach Definition der Spezialisierungsordnung ist $\mathsf{p}_X \colon \mathfrak{Q}X \to \mathfrak{C}X$ offensichtlich eine Ordnungseinbettung.

Für jeden Hüllenraum X besteht das $\bigvee$-Spektrum $\mathcal{S}\mathfrak{P}X$ aus den einelementigen Teilmengen von X. Nach Definition ist daher X genau dann differenziert, wenn verschiedene Punkte auch verschiedene Abschlüsse haben. Letzteres ist bekanntlich dazu äquivalent, dass die Spezialisierung von X antisymmetrisch ist.

Lemma 6.1.10. *Sei X ein Hüllenraum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) X ist differenziert.

(2) $\mathsf{p}_X : \mathfrak{Q}X \to \mathfrak{C}X$ ist injektiv, d. h. für alle $x, y \in X$ gilt: $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$.

(3) $\mathfrak{Q}X$ ist eine geordnete Menge. □

Diskret ist ein Hüllenraum X genau dann, wenn alle einelementigen Teilmengen abgeschlossen sind. Die Reduziertheit von X ist gleichbedeutend damit, dass alle Punktabschlüsse in $\mathfrak{C}X$ $\bigvee$-irreduzibel sind, d. h. eine $\bigvee$-Basis von $\mathfrak{C}X$ bilden (siehe Definition 4.1.12). In topologischen Zusammenhängen sind diese Eigenschaften unter anderen Namen bekannt:

Bemerkung 6.1.11. Die folgenden Eigenschaften von Hüllenräumen entsprechen den nebenstehenden, aus der Topologie bekannten *Trennungsaxiomen*:

Eigenschaften	Trennungsaxiom
differenziert	T_0
diskret	T_1
differenziert und reduziert	T_D

Die Wahl der Bezeichnungen „differenziert“ und „diskret“ orientiert sich unter anderem an den gleichnamigen Begriffen aus der Modallogik im Rahmen ihrer allgemeinen relationalen Semantik, siehe etwa [8].

6.1.2 Hüllenräume und quasigeordnete Mengen

Die bekannten Zusammenhänge zwischen den abgeschlossenen Teilmengen eines Hüllenraums X mit dem durch die Spezialisierung von X induzierten Abschnittsoperator $\downarrow_X$ führen darauf, dass Γ_X bezüglich $\downarrow_X$ *bindend* ist:

Proposition 6.1.12. *Sei X ein Hüllenraum.*

(a) Die Hauptideale bezüglich der Spezialisierungsordnung sind gerade die Punktabschlüsse von X, d. h. für alle $x \in X$ ist $\downarrow_X x = \overline{\{x\}}$. Äquivalent ist $\downarrow_X \restriction \mathcal{S}\mathfrak{P}X = \Gamma_X \restriction \mathcal{S}\mathfrak{P}X$.

(b) Jede abgeschlossene Teilmenge von X ist ein unterer Abschnitt hinsichtlich der Spezialisierungsordnung, d. h. $\mathcal{C}X \subseteq \mathcal{A}\mathfrak{Q}X$ oder gleichbedeutend $\downarrow_X \leq \Gamma_X$.

(c) Γ_X ist bindend bezüglich $\downarrow_X$, d. h. es gilt

$$\downarrow_X \circ \Gamma_X \circ \downarrow_X = \Gamma_X.$$

Beweis. Die Aussagen in (a) und (b) sind leicht einzusehen. Zu (c): Nach Korollar 4.2.16 ist (b) äquivalent zu $\downarrow_X \circ \Gamma_X = \Gamma_X$. Aus Lemma 4.1.10 folgt mit (a) für alle $A \subseteq X$

$$\Gamma_X \downarrow_X A = \Gamma_X \bigcup \{ \downarrow_X x : x \in A \} = \Gamma_X \bigcup \{ \Gamma_X(\{x\}) : x \in A \} = \Gamma_X A,$$

also auch $\Gamma_X \circ \downarrow_X = \Gamma_X$. □

Das nächste Lemma zeigt, wie Hüllenoperatoren und quasigeordnete Mengen über die Operatoren $R \mapsto R^{\exists}$ und $f \mapsto f_{\exists}$ aus Kapitel 3 zusammenhängen.

Lemma 6.1.13. *Sei X ein Hüllenraum und P eine quasigeordnete Menge.*

(a) $(\Gamma_X)_{\exists}$ *ist eine Quasiordnung, nämlich* $(\Gamma_X)_{\exists} = \geq_X$.

(b) $(\geq_P)^{\exists}$ *ist ein residuierter Hüllenoperator, nämlich* $(\geq_P)^{\exists} = \downarrow_P$.

Beweis. Zu (a). Es gilt $(x, y) \in (\Gamma_X)_{\exists} \Leftrightarrow y \in \Gamma_X(\{x\}) \Leftrightarrow y \leq_X x$ für alle $x, y \in X$.

Zu (b). Die Abbildungen $(\geq_P)^{\exists}$ und $\downarrow_P$ auf $\mathfrak{P}|P|$ sind residuiert, und für alle $x \in P$ ist $(\geq_P)^{\exists}(\{x\}) = x{\geq_P} = {\downarrow_P} x = {\downarrow_P}(\{x\})$. □

In Kapitel 4 hatten wir für den Schnittoperator Δ_P zu einer quasigeordneten Menge P bereits die differenzierte klassische Hüllenstruktur $(\mathfrak{P}|P|, \Delta_P)$ als ein wichtiges Beispiel kennengelernt (siehe Proposition 4.1.14). Den korrespondierenden Hüllenraum nennen wir den *Schnittraum* von P, und analog führen wir zum Abschnittsoperator $\downarrow_P$ den sogenannten *Abschnittsraum* ein:

Definition 6.1.14 (Schnitt- und Abschnittsraum)**.** Für eine quasigeordnete Menge P sei der *Schnittraum* $\mathfrak{M}P$ sowie der *Abschnittsraum* $\mathfrak{D}P$ von P definiert durch

$$\mathfrak{M}P := (|P|, \Delta_P) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D}P := (|P|, \downarrow_P).$$

Wir betrachten einige Eigenschaften von Abschnittsräumen.

Beispiel 6.1.15. Für jede quasigeordnete Menge P ist der Abschnittsraum $\mathfrak{D}P = (|P|, \downarrow_P)$ residuiert und reduziert, im allgemeinen aber nicht differenziert. Er ist genau dann differenziert, wenn P eine *geordnete* Menge ist. Außerdem ist $\mathfrak{D}P$ genau dann diskret, wenn P eine Antikette ist. Der Hüllenverband des Abschnittsraums $\mathfrak{D}P$ ist natürlich der Abschnittsverband von P:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D}P = (\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{D}P)_\gamma = (\mathfrak{P}|P|, \downarrow_P)_\gamma = \mathfrak{A}P.$$

Da der Hüllenoperator $\downarrow_P$ residuiert ist, stellt sich sofort die Frage, wie sein Residual $(\downarrow_P)^*$ gebildet wird. Dies folgt mühelos aus den früheren Resultaten zu Axialitäten: Nach Beispiel 3.3.13 und Lemma 6.1.13 ist

$$\downarrow^* = (\geq^{\exists})^* = - \circ \leq^{\exists} \circ - = - \circ \uparrow \circ -.$$

Wir wissen aus Proposition 1.2.43, dass $(\downarrow_P)^*$ ein *Kernoperator auf* $|P|$ (d. h. eine Kernoperation auf $\mathfrak{P}|P|$) ist, und laut Korollar 1.2.44 gilt für jedes $A \subseteq P$

$$-{\uparrow} - A = A \iff {\downarrow} A.$$

Das sieht man natürlich auch leicht direkt, da die Komplemente unterer Abschnitte genau die oberen Abschnitte sind (Lemma 1.2.9).

Insgesamt können wir nun wie folgt die klassische Bijektion zwischen Alexandroff-Räumen und quasigeordneten Mengen beschreiben:

Korollar 6.1.16. *Sei A eine Menge. Die vollständigen Verbände aller*

- *residuierten Hüllenoperatoren auf A, enthalten in* $\mathsf{res}(\mathfrak{P}A; \mathfrak{P}A)$, *und*
- *Quasiordnungen auf A, enthalten in* $\mathsf{Rel}(A; A)$,

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen $\Gamma \mapsto (\Gamma_\exists)^{\mathrm{d}}$ *und* $\leq \mapsto (\leq^{\mathrm{d}})^\exists$ *(und ebenso vermöge* $\Gamma \mapsto \Gamma_\exists$ *und* $\leq \mapsto \leq^\exists$*). Insbesondere gilt*

- $\mathfrak{D}\mathfrak{Q}X = X$ *für jeden residuierten Hüllenraum X,*
- $\mathfrak{Q}\mathfrak{D}P = P$ *für jede quasigeordnete Menge P.*

Beweis. Nach Theorem 3.3.7 und Lemma 6.1.13. □

Wir geben noch verschiedene Charakterisierungen von residuierten Hüllenräumen an.

Proposition 6.1.17. *Sei X ein Hüllenraum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) X ist residuiert (ein A-Raum).

(2) $\overline{A} = \bigcup\{\,\overline{\{x\}} : x \in A\,\}$ *für alle* $A \subseteq X$.

(3) $\mathcal{C}X$ ist eine A-Topologie.

(4) $X = \mathfrak{D}\mathfrak{Q}X$ *(d. h.* $\Gamma_X = {\downarrow_X}$*).*

(5) $\mathfrak{C}X = \mathfrak{A}\mathfrak{Q}X$.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (1)–(3) ergibt sich aus Theorem 4.1.16 und Proposition 4.1.11. (1) ⇒ (4) gilt nach Korollar 6.1.16, und aus $X = \mathfrak{D}\mathfrak{Q}X$ folgt $\mathfrak{C}X = \mathfrak{A}\mathfrak{Q}X$, also (4) ⇒ (5). (5) ⇒ (3) ist klar. □

Mit Hilfe von Beispiel 5.3.20 sieht man, dass die Gestalt *residualer* Hüllenräume folgendermaßen festgelegt ist:

Korollar 6.1.18. *Ein Hüllenraum X ist genau dann residual, wenn Γ_X die Form*

$$\Gamma_X(A) = A \cup B$$

für eine feste Menge B besitzt, nämlich $B = \Gamma_X(\emptyset)$. *Im Fall* $\Gamma_X(\emptyset) = \emptyset$ *ist dann Γ_X bereits die Identität auf* $\mathfrak{P}X$. □

Als nächstes verallgemeinern wir die Aussagen aus Proposition 6.1.12 zu Hüllen- und Abschnittsoperatoren.

Proposition 6.1.19. *Sei X ein Hüllenraum und P eine quasigeordnete Menge mit* $|X| = |P|$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) ${\leq_P} \subseteq {\leq_X}$.

(2) ${\downarrow_P} \leq {\downarrow_X}$.

(3) ${\downarrow_P} \circ {\downarrow_X} = {\downarrow_X}$.

(4) ${\downarrow_P} \leq \Gamma_X$.

(5) ${\downarrow_P} \circ \Gamma_X = \Gamma_X$.

(6) $\Gamma_X \circ {\downarrow_P} = \Gamma_X$.

(7) Γ_X *ist bindend bezüglich* ${\downarrow_P}$.

(8) $\mathcal{C}X \subseteq \mathcal{A}P$.

Beweis. (2) ⇔ (4) gilt wegen

$$\downarrow_P \leq \downarrow_X \quad\Longleftrightarrow\quad \downarrow_P \restriction \mathcal{S}\mathfrak{P}X \leq \downarrow_X \restriction \mathcal{S}\mathfrak{P}X = \Gamma_X \restriction \mathcal{S}\mathfrak{P}X \quad\Longleftrightarrow\quad \downarrow_P \leq \Gamma_X.$$

Die Äquivalenzen (1) ⇔ (2), (2) ⇔ (8) sowie (2) ⇔ (3) und (4) ⇔ (5) sind klar.

(4) ⇒ (6): Aus $\downarrow_P \leq \Gamma_X$ folgt $\Gamma_X \circ \downarrow_P \leq \Gamma_X \circ \Gamma_X = \Gamma_X$, also die Behauptung. (6) ⇒ (4): Nach Voraussetzung ist $\downarrow_P \leq \Gamma_X \circ \downarrow_P = \Gamma_X$.

(6) ⇔ (7) ergibt sich schließlich aus der Äquivalenz der Aussagen (5) und (6). □

Korollar 6.1.20. *Seien P und Q quasigeordnete Mengen mit derselben Grundmenge $|P| = |Q|$. Dann sind äquivalent:*

(1) $\leq_P \subseteq \leq_Q$, *(2)* $\downarrow_P \leq \downarrow_Q$, *(3)* $\downarrow_P \circ \downarrow_Q = \downarrow_Q$, *(4)* $\downarrow_Q \circ \downarrow_P = \downarrow_Q$, *(5)* $\mathcal{A}Q \subseteq \mathcal{A}P$.

Beweis. Dies folgt mit $X = \mathfrak{D}Q$ aus Proposition 6.1.19. □

Abschließend betrachten wir kurz die sogenannten Standardvervollständigungen von quasigeordneten Mengen (siehe etwa [39]).

Definition 6.1.21 (Standardvervollständigungen)**.** Sei P eine quasigeordnete Menge und X ein Hüllenraum mit $|X| = |P|$. Der (vollständige) Hüllenverband $\mathfrak{C}X$ wird eine *Standardvervollständigung* von P genannt, falls gilt:

$$\mathcal{N}P \subseteq \mathcal{C}X \subseteq \mathcal{A}P.$$

Proposition 6.1.22. *Sei P eine quasigeordnete Menge und X ein Hüllenraum mit $|X| = |P|$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{C}X$ *ist eine Standardvervollständigung von* P.

(2) $\downarrow_P \leq \Gamma_X \leq \Delta_P$.

(3) Die Punktabschlüsse sind genau die Hauptideale, d. h. $\overline{\{x\}} = \downarrow_P x$ *für alle* $x \in |X|$.

(4) $\mathfrak{Q}X = P$, *d. h.* $\leq_P$ *ist die Spezialisierung von* X.

(5) Γ_X *ist bindend bzgl.* $\downarrow_P$, *und* $\overrightarrow{\Gamma_X} \leq \Delta_P^{\downarrow}$.

(6) Γ_X *ist bindend bzgl.* $\downarrow_P$, *und* $(\mathfrak{A}P, \overrightarrow{\Gamma_X})$ *ist eine diskrete monotone Hüllenstruktur.*

Beweis. (1) ⇔ (2) gilt nach Definition einer Standardvervollständigung.

Aussage (3) besagt $\downarrow_X = \downarrow_P$. Damit sieht man sofort (3) ⇔ (4), und (2) ⇔ (3) ergibt sich, da für $J := \mathcal{S}\mathfrak{P}X$ die Aussage $\downarrow_P \leq \Gamma_X \leq \Delta_P$ äquivalent ist zu

$$\downarrow_P \restriction J \leq \Gamma_X \restriction J = \downarrow_X \restriction J \leq \Delta_P \restriction J = \downarrow_P \restriction J.$$

(2) ⇔ (5): Nach Proposition 6.1.19 ist $\downarrow_P \leq \Gamma_X$ gleichbedeutend damit, dass Γ_X bzgl. $\downarrow_P$ bindend ist. Damit ist $\overrightarrow{\Gamma_X} = \downarrow_P^{\bullet} \circ \Gamma_X \circ \downarrow_P^{\circ}$ eine Hüllenoperation auf $\mathfrak{A}P$ (siehe Korollar 4.3.5). Da auch Δ_P bzgl. $\downarrow_P$ bindend ist (vergleiche Beispiel 4.3.6), ist genau dann $\Gamma_X \leq \Delta_P$, wenn $\overrightarrow{\Gamma_X} \leq \overrightarrow{\Delta_P} = \Delta_P^{\downarrow}$ gilt.

(5) ⇔ (6): Es ist $\Delta_P^{\downarrow}(\downarrow_P x) = \Delta_P(\{x\}) = \downarrow_P x$ für alle $x \in X$. Somit ist $\overrightarrow{\Gamma_X} \leq \Delta_P^{\downarrow}$ äquivalent zu

$$\overrightarrow{\Gamma_X} \restriction \mathcal{S}\mathfrak{A}P \leq \Delta_P^{\downarrow} \restriction \mathcal{S}\mathfrak{A}P = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}P} \restriction \mathcal{S}\mathfrak{A}P.$$ □

Dass die ersten vier Aussagen der obigen Proposition äquivalent sind, ist aus der Literatur bereits wohlbekannt. Interessanter sind hingegen die letzten beiden Beschreibungen von Standardvervollständigungen, denn nach Korollar 4.3.5 ist $\Gamma_X \mapsto \overrightarrow{\Gamma_X} = \downarrow_P^\bullet \circ \Gamma_X \circ \downarrow_P^\circ$ eine Bijektion zwischen den bezüglich $\downarrow_P$ bindenden Hüllenoperationen auf $\mathfrak{P}X$ und den Hüllenoperationen auf dem Hüllenbereich $(|X|, \downarrow_P)_\gamma = \mathfrak{C}\mathfrak{D}P = \mathfrak{A}P$. *Die Standardvervollständigungen von P stehen demzufolge in Bijektion zu den diskreten monotonen Hüllenstrukturen mit der zugrundeliegenden geordneten Menge $\mathfrak{A}P$.*

6.2 Relationen zwischen Hüllenräumen

Mit Hilfe der Korrespondenz von Relationen und $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien über Potenzmengenverbänden aus Kapitel 3 können wir in diesem Abschnitt eine Reihe von Folgerungen zu Relationen zwischen Hüllenräumen aus den Resultaten zu (klassischen) Hüllenstrukturen ableiten.

Definition 6.2.1 (Relationen zwischen Hüllenräumen)**.** Sei $(X;Y) = (X_1, \dots, X_n; Y)$ eine Familie von Hüllenräumen. Unter einer *Relation R zwischen $X_1, \dots, X_n$ und Y* (oder kurz: *über* $(X;Y)$) verstehen wir im folgenden einfach eine Relation zwischen den Grundmengen $|X_1|, \dots, |X_n|$ und $|Y|$, und wir schreiben in diesem Fall auch $R : X \rightharpoondown Y$. Funktionen zwischen Hüllenräumen werden entsprechend in der Form $f : X \to Y$ notiert. Es bezeichne

$$\mathsf{Rel}(X_1, \dots, X_n; Y) := \mathsf{Rel}(|X_1|, \dots, |X_n|; |Y|)$$

den vollständigen Mengenverband aller Relationen zwischen $X_1, \dots, X_n$ und Y (siehe Definition 1.2.10).

Sofern nichts anderes festgelegt wird, sei für den gesamten Rest dieses Kapitels stets $(X;Y) = (X_1, \dots, X_n; Y)$ eine Familie von Hüllenräumen und $(\sigma;\tau) \in \{+,-\}^{n+1}$ eine Signatur.

Für jede Relation $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \dots, X_n; Y)$ fassen wir sowohl $R^\exists_{(\sigma;\tau)}$ als auch $R^\forall_{(\sigma;\tau)}$ als n-stellige Abbildungen zwischen den zugehörigen klassischen Hüllenstrukturen auf, also

$$R^\exists_{(\sigma;\tau)}, R^\forall_{(\sigma;\tau)} : (\bar{\mathfrak{P}}X_1, \dots, \bar{\mathfrak{P}}X_n) \to \bar{\mathfrak{P}}Y.$$

Wir wissen, dass die Abbildung $R^\exists_{(\sigma;\tau)}$ in jedem Fall $(\sigma;\tau)$-residuiert ist, und $R^\forall_{(\sigma;\tau)}$ ist immer $(\sigma;-\tau)$-residuiert. Außerdem wurde in Kapitel 3 detailliert beschrieben, wie die Werte dieser beiden Funktionen und auch die ihrer jeweiligen Residuale gebildet werden.

Als erstes werden wir mittels $R \mapsto R^\exists_{(\sigma;\tau)}$ die Grundbegriffe stetig, σ-vollstetig und abgeschlossen für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen auf Relationen zwischen Hüllenräumen übertragen. Im Anschluss verwenden wir $R \mapsto R^\forall_{([+];+)} = R^\forall$, um über bindende Funktionen zwischen Hüllenstrukturen sogenannte Bindungen zwischen Hüllenräumen zu definieren.

6.2.1 Grundbegriffe für Relationen

Definition 6.2.2 (Stetige, vollstetige und abgeschlossene Relationen)**.** Eine Relation R zwischen Hüllenräumen $X_1, \dots, X_n$ und Y heißt

- $(\sigma;\tau)$-*stetig*, falls $R^\exists_{(\sigma;\tau)}$ stetig ist, d. h. falls gilt:

$$\Gamma_Y \circ R^\exists_{(\sigma;\tau)} \circ \Gamma_X = \Gamma_Y \circ R^\exists_{(\sigma;\tau)};$$

- $(\sigma;\tau)$-*vollstetig*, falls $R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}$ σ-vollstetig ist, d. h. falls R $(\sigma;\tau)$-stetig ist und darüber hinaus für alle $x_i \in X_i$ $(i \in \underline{n})$ gilt:

$$(\Gamma_Y \circ R^{\exists}_{(\sigma;\tau)})(\{x_1\}^{\sigma_1}, \dots, \{x_n\}^{\sigma_n}) = R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}(\{x_1\}^{\sigma_1}, \dots, \{x_n\}^{\sigma_n});$$

- $(\sigma;\tau)$-*abgeschlossen*, falls $R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}$ abgeschlossen ist, d. h. falls gilt:

$$\Gamma_Y \circ R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \circ \Gamma_X = R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \circ \Gamma_X.$$

Im Fall $(\sigma;\tau) = ([+];+)$ lassen wir wie üblich die Signatur weg und sprechen von *stetigen*, *vollstetigen* bzw. *abgeschlossen* Relationen zwischen $X_1, \dots, X_n$ und Y.

Zur Erinnerung: Die Elemente des $\bigwedge$-Spektrums von $\mathfrak{P}|X_i|$ sind gerade die Komplemente $\{x_i\}^- = -\{x_i\}$ für $x_i \in X_i$, und es ist $\{x_i\}^+ = +\{x_i\} = \{x_i\}$.

Für die obigen Grundbegriffe erhält man sofort die folgenden Beschreibungen, die sich umgekehrt gut als alternative Definitionen der Grundbegriffe für Relationen eignen.

Proposition 6.2.3. *Sei* $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \dots, X_n; Y)$.

(a) R ist genau dann $(\sigma;\tau)$*-stetig, wenn*

$$\overline{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n})} = \overline{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}(A_1, \dots, A_n)} \qquad \text{für alle } A_i \subseteq X_i \ (i \in \underline{n}) \text{ gilt.}$$

(b) R ist genau dann $(\sigma;\tau)$*-vollstetig, wenn R* $(\sigma;\tau)$*-stetig ist und*

$$\overline{\tau R(x_1, \dots, x_n; \_)} = \tau R(x_1, \dots, x_n; \_) \qquad \text{für alle } x_i \in X_i \ (i \in \underline{n}) \text{ gilt.}$$

(c) R ist genau dann $(\sigma;\tau)$*-abgeschlossen, wenn*

$$\overline{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n})} = R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}) \qquad \text{für alle } A_i \subseteq X_i \ (i \in \underline{n}) \text{ gilt.}$$

Beweis. Die Aussage (b) folgt aus Korollar 3.3.9, lässt sich aber auch leicht direkt überprüfen, und der Rest ist klar. □

Konvention 6.2.4 (Sprechweise für Hüllenoperatoren)**.** Ist R eine Relation zwischen Mengen $A_1, \dots, A_n$ und A_{n+1} und ist Γ_i ein Hüllenoperator auf A_i für alle $i \in \underline{n+1}$, so sagen wir auch, R sei $(\sigma;\tau)$-stetig *bezüglich* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *und* Γ_{n+1}, falls R als Relation zwischen den Hüllenräumen $(A_1, \Gamma_1), \dots, (A_n, \Gamma_n)$ und (A_{n+1}, Γ_{n+1}) $(\sigma;\tau)$-stetig ist. Analoge Sprechweisen gelten für die übrigen auf Relationen übertragenen Grundbegriffe, vergleiche die Konvention 4.2.4 für Hüllenstrukturen.

Bemerkung 6.2.5. Wir hatten in Beispiel 4.2.6 gesehen, dass eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen Hüllenräumen genau dann im üblichen topologischen Sinne stetig (bzw. abgeschlossen) ist, wenn $f_{\to}\colon \bar{\mathfrak{P}}X \to \bar{\mathfrak{P}}Y$ in unserem Sinne stetig (bzw. abgeschlossen) ist. Wegen $f_{\to} = f^{\exists} = f^{\exists}_{(+;+)}$ ist die oben definierte Stetigkeit (bzw. Abgeschlossenheit) für Relationen also eine Verallgemeinerung der bekannten Begriffe für Funktionen aus der Topologie.

Für die geordneten Mengen aller stetigen bzw. vollstetigen Relationen zwischen gegebenen Hüllenräumen führen wir noch eigene Notationen ein.

Notation 6.2.6 (Geordnete Mengen stetiger bzw. vollstetiger Relationen)**.** Mit

$$\mathsf{CRel}_{(\sigma;\tau)}(X_1,\dots,X_n;Y) \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{CCRel}_{(\sigma;\tau)}(X_1,\dots,X_n;Y)$$

bezeichnen wir die bezüglich der Mengeninklusion geordneten Mengen aller $(\sigma;\tau)$-stetigen bzw. aller $(\sigma;\tau)$-vollstetigen Relationen zwischen X_1, …, X_n und Y.

Wie üblich sei $\mathsf{CRel}(X;Y) = \mathsf{CRel}_{([+];+)}(X;Y)$ und $\mathsf{CCRel}(X;Y) = \mathsf{CCRel}_{([+];+)}(X;Y)$.

Lemma 6.2.7. $\mathsf{CRel}_{(\sigma;\tau)}(X_1,\dots,X_n;Y)$ *ist ein vollständiger Verband, dessen Supremum im Fall $\tau = +$ durch die Vereinigung gegeben ist.*

Beweis. Nach Lemma 5.2.7 und Theorem 3.3.7. □

Zu zwei zentralen Theoremen für $\mathsf{CCRel}_{(\sigma;\tau)}(X_1,\dots,X_n;Y)$ gelangen wir nun, indem die entsprechenden Resultate für Hüllenstrukturen aus der Zusammenfassung am Ende des vorigen Kapitels auf Hüllenräume übertragen werden. Vorbereitend sei daran erinnert, dass für eine beliebige Relation R zwischen Hüllenräumen X_1, …, X_n und Y die durch $R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}$ kanonisch induzierte Abbildung

$$\overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}} \colon (\mathfrak{C}X_1,\dots,\mathfrak{C}X_n) \to \mathfrak{C}Y$$

bestimmt ist durch

$$\overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}} = \Gamma^{\bullet}_{Y} \circ R^{\exists}_{(\sigma;\tau)} \circ \Gamma^{\circ}_{X}.$$

Nach Proposition 3.3.8 ist somit für alle $C_i \in \mathcal{C}X_i$ $(i \in \underline{n})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}}(C_1,\dots,C_n) &= \overline{\tau R^{\exists}(\sigma_1 C_1,\dots,\sigma_n C_n)} \\ &= \overline{\tau\{\, y : \exists x_1 \dots \exists x_n (R(x_1,\dots,x_n;y)\ \&\ x_1 \in \sigma_1 C_1\ \&\ \dots\ \&\ x_n \in \sigma_n C_n)\,\}}.\end{aligned}$$

Das erste Theorem beschreibt, wie unter geeigneten Voraussetzungen alle $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenverbänden durch $(\sigma;\tau)$-vollstetige Relationen zwischen Hüllenräumen auf kanonische Weise dargestellt werden können.

Theorem 6.2.8. *Ist X σ-residual, so sind die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{CCRel}_{(\sigma;\tau)}(X;Y)^{\tau}$ *aller $(\sigma;\tau)$-vollstetigen Relationen zwischen X_1, …, X_n und Y und*
- $\mathsf{res}_{(\sigma;\tau)}(\mathfrak{C}^n X;\mathfrak{C}Y)$ *aller $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen von $\mathfrak{C}X_1$, …, $\mathfrak{C}X_n$ in $\mathfrak{C}Y$*

isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen

$$R \mapsto \overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}} \quad \textit{und} \quad \Phi \mapsto (\overleftarrow{\Phi})^{(\sigma;\tau)}_{\exists}.$$

Beweis. Dies folgt aus Theorem 5.3.40 und Theorem 3.3.7. Laut Korollar 3.3.11 ist

$$((\overleftarrow{\Phi})^{\sim}_{(\sigma;\tau)})^{(\sigma;\tau)}_{\exists} = (\overleftarrow{\Phi})^{(\sigma;\tau)}_{\exists}.$$ □

Die Relation $(\overleftarrow{\Phi})^{(\sigma;\tau)}_{\exists}$ ergibt sich dabei nach Proposition 3.3.10 durch

$$(\overleftarrow{\Phi})^{(\sigma;\tau)}_{\exists}(x_1,\dots,x_n;\_) = \tau\Phi(\overline{\sigma_1\{x_1\}},\dots,\overline{\sigma_n\{x_n\}}).$$

Das zweite Theorem zeigt, wie die Residuale der induzierten $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenverbänden berechnet werden.

Theorem 6.2.9. *Für jede $(\sigma;\tau)$-vollstetige Relation R zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und Y ist*

$$\overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}}\colon (\mathfrak{C}X_1, \ldots, \mathfrak{C}X_n) \to \mathfrak{C}Y$$

eine $(\sigma;\tau)$-residuierte Abbildung mit dem i-ten $(\sigma;\tau)$-Residual $(i \in \underline{n})$

$$(\overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}})^{(i)}_{(\sigma;\tau)} = \overrightarrow{(R^{\exists}_{(\sigma;\tau)})^{(i)}_{(\sigma;\tau)}} = \overrightarrow{(R^{-i})^{\exists}_{(\sigma;\tau)^{-i}}}.$$

Beweis. Nach Theorem 5.3.35 und Theorem 3.3.12. □

Ist $S \in \mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ eine $(\sigma;\tau)$-abgeschlossene Relation, so ist

$$\overrightarrow{S^{\exists}_{(\sigma;\tau)}}(C_1, \ldots, C_n) = \tau S^{\exists}(\sigma_1 C_1, \ldots, \sigma_n C_n) \qquad \text{für alle } C_i \in \mathcal{C}X_i \ (i \in \underline{n}).$$

Sowohl für die Berechnung von $\overrightarrow{R^{\exists}_{(\sigma;\tau)}}$ als auch seiner Residuale $\overrightarrow{(R^{-i})^{\exists}_{(\sigma;\tau)^{-i}}}$ ist dies unter Umständen nützlich. In Kapitel 5 wurde ausführlich untersucht, unter welchen Voraussetzungen die Residuale von σ-vollstetigen, $(\sigma;\tau)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen abgeschlossen sind (siehe insbesondere Theorem 5.3.42), und dies lässt sich natürlich über die Korrespondenz $S \mapsto S^{\exists}_{(\sigma;\tau)}$ auf $(\sigma;\tau)$-vollstetige Relationen übertragen.

Außerdem lassen sich in einigen Fällen bereits unter schwächeren Voraussetzungen als in Theorem 6.2.9 $(\sigma;\tau)$-residuierte Familien über Hüllenverbänden kanonisch induzieren. So erhält man beispielsweise schon durch stetige Relationen immer auch residuierte Abbildungen zwischen Hüllenverbänden (und auf diese Weise alle, da jede vollstetige Relation stetig ist), vergleiche Theorem 5.3.11. Wir verzichten aber auf eine Wiederholung all dieser Details für Relationen.

Die Bedeutung der Theoreme 6.2.8 und 6.2.9 liegt darin, dass sie systematisch für alle Signaturen $(\sigma;\tau)$ zeigen, wie sich auf kanonische Weise alle $(\sigma;\tau)$-residuierten Familien über geeigneten Hüllenverbänden aus Relationen konstruieren lassen. In der Literatur treten entsprechende Konstruktionen in der Regel nur ad hoc und in Spezialfällen auf (vergleiche für den Bereich der relationalen Semantik substruktureller Logiken etwa [6], [80] oder [45]).

Sowohl aus dem vorigen Kapitel als auch aus Kapitel 4 lassen sich zahlreiche interessante Charakterisierungen und Zusammenhänge der Grundbegriffe $(\sigma;\tau)$-stetig, $(\sigma;\tau)$-vollstetig und $(\sigma;\tau)$-abgeschlossen für Relationen herleiten. Aus Platzgründen überspringen wir die allgemeine Darstellung für sämtliche Signaturen und beschränken uns im weiteren Verlauf auf ausgewählte Fakten für den Fall $(\sigma;\tau) = ([+];+)$.

6.2.2 Stetige Relationen

Stetige Relationen zwischen Hüllenräumen $X_1, \ldots, X_n$ und Y sind für uns vor allem deshalb von Bedeutung, weil sie über

$$R \mapsto \overrightarrow{R^{\exists}}$$

genau die residuierten Abbildungen zwischen den Hüllenverbänden $\mathfrak{C}X_1, \ldots, \mathfrak{C}X_n$ und $\mathfrak{C}Y$ induzieren (man kombiniere Theorem 6.2.8 mit Theorem 5.3.11 oder argumentiere mit der vollstetigen Hülle). Für die praktische Anwendung stetiger Relationen sind daher möglichst viele brauchbare Charakterisierungen wünschenswert.

Die folgenden Beschreibungen der Stetigkeit für Relationen ergeben sich mühelos aus früheren Ergebnissen zu stetigen Funktionen zwischen Hüllenstrukturen:

Proposition 6.2.10. *Sei R eine Relation zwischen Hüllenräumen $X_1, \ldots, X_n$ und Y. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *R ist stetig.*

(2) $\overline{R^\exists(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n})} = \overline{R^\exists(A_1, \ldots, A_n)}$ *für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n})$.*

(3) $R^\exists(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}) \subseteq \overline{R^\exists(A_1, \ldots, A_n)}$ *für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n})$.*

(4) *Für alle $i \in \underline{n}$ und für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n})$ gilt*
$$R^\exists(A_1, \ldots, \overline{A_i}, \ldots, A_n) \subseteq \overline{R^\exists(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)}.$$

(5) *Für alle $i \in \underline{n}$ und alle $x_k \in X_k$ $(k \in \underline{n})$, $A_i \subseteq X_i$ gilt*
$$R^\exists(\{x_1\}, \ldots, \overline{A_i}, \ldots, \{x_n\}) \subseteq \overline{R^\exists(\{x_1\}, \ldots, A_i, \ldots, \{x_n\})}.$$

(6) *Für alle $i \in \underline{n}$ ist $(R^\exists)^{(i)}$ in der i-ten Variablen abgeschlossen.*

(7) *Für alle $i \in \underline{n}$ und für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$, $B \subseteq Y$ gilt*
$$B \in \mathcal{C}Y \quad\Longrightarrow\quad -(R^{-i})^\exists(A_1, \ldots, -B, \ldots, A_n) \in \mathcal{C}X_i.$$

(8) *Für alle $i \in \underline{n}$ und alle $x_k \in X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$, $B \subseteq Y$ gilt*
$$B \in \mathcal{C}Y \quad\Longrightarrow\quad -(R^{-i})^\exists(\{x_1\}, \ldots, -B, \ldots, \{x_n\}) \in \mathcal{C}X_i.$$

(9) *Für alle $i \in \underline{n}$ und für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$, $B \subseteq Y$ gilt*
$$B \in \mathcal{C}Y \quad\Longrightarrow\quad \{\, x_i \in X_i : R^\exists(A_1, \ldots, \{x_i\}, \ldots, A_n) \subseteq B \,\} \in \mathcal{C}X_i.$$

(10) *Für alle $i \in \underline{n}$ und alle $x_k \in X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$, $B \subseteq Y$ gilt*
$$B \in \mathcal{C}Y \quad\Longrightarrow\quad \{\, x_i \in X_i : R(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n, \_) \subseteq B \,\} \in \mathcal{C}X_i.$$

(11) *Es gibt einen $\bigwedge$-Erzeuger $\mathcal{M}$ des Hüllensystems $\mathfrak{C}Y$, so dass für alle $i \in \underline{n}$, alle $x_k \in X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$ und alle $M \in \mathcal{M}$ gilt:*
$$\{\, x_i \in X_i : R(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n, \_) \subseteq M \,\} \in \mathcal{C}X_i.$$

Beweis. Die Aussagen (2)–(11) sind aus den folgenden Gründen jeweils äquivalent zu (1): Aussage (2) besagt nach Definition, dass R stetig ist. (3) besagt, dass $R^\exists$ schwach stetig ist ($R^\exists$ ist insbesondere isoton). Laut (4) ist $R^\exists$ in jeder Variablen (schwach) stetig, siehe Theorem 4.2.28. Zu (5) siehe Korollar 5.3.14. Für die Aussagen (6)–(11) siehe Theorem 5.3.16 und Theorem 3.3.12. □

Das nächste Beispiel zeigt, wie sich stetige binäre Operationen zu einer residuierten Familie auf einem Hüllenverband liften lassen.

Beispiel 6.2.11. Wir betrachten Proposition 6.2.10 für den Fall $n = 2$, einen Hüllenraum $A := X_1 = X_2 = Y$ und speziell für Funktionen zwischen Hüllenräumen. Es sei $\circ$ eine zweistellige Operation auf $|A|$, also $(|A|, \circ)$ eine binäre Algebra. Ist $\circ$ stetig bezüglich Γ_A, so induziert das Komplexprodukt von $\circ$ eine in beiden Variablen *residuierte* Operation

$$\bullet := \overrightarrow{\circ^{\exists}}$$

auf dem Hüllenverband $\mathfrak{C}A$ (siehe Beispiel 3.3.14 für das Komplexprodukt und seine Residuale). Es ist

$$C \bullet D = \Gamma_A(C \circ D) = \overline{\{\, x \circ y : x \in C \;\&\; y \in D \,\}}.$$

Die Residuale $\leftarrow := \bullet^{(1)} = \overrightarrow{(\circ^{\exists})^{(1)}}$ und $\rightarrow := \bullet^{(2)} = \overrightarrow{(\circ^{\exists})^{(2)}}$ sind dann gegeben durch

$$E \leftarrow D = \{\, x \in A : \{x\} \circ D \subseteq E \,\} \quad \text{und} \quad C \rightarrow E = \{\, x \in A : C \circ \{x\} \subseteq E \,\}$$

für alle $C, D, E \in \mathcal{C}A$ (die Residuale $(\circ^{\exists})^{(1)}$ und $(\circ^{\exists})^{(2)}$ des Komplexproduktes sind wegen der Stetigkeit von $\circ$ insbesondere abgeschlossen).

Um die Stetigkeit von $\circ$ zu garantieren, genügt nun nach Proposition 6.2.10 die Forderung, dass für alle abgeschlossenen Mengen $E \in \mathcal{C}A$ und alle $y \in A$ auch die Mengen

$$\{\, x \in A : x \circ y \in E \,\} \quad \text{und} \quad \{\, x \in A : y \circ x \in E \,\}$$

abgeschlossen sind. Für die Translationen $l_y \colon x \mapsto x \circ y$ und $r_y \colon x \mapsto y \circ x$ auf A sind diese Mengen gerade die Urbilder $l_y^{-1}[E]$ bzw. $r_y^{-1}[E]$.

Es ist instruktiv, parallel zu den allgemeinen Ausführungen die Stetigkeit von Relationen zwischen Hüllenräumen speziell für *Abschnittsräume* zu betrachten, also Hüllenräume der Form $\mathfrak{D}P = (|P|, \downarrow_P)$ für eine quasigeordnete Menge P. Dabei lässt sich gewinnbringend ausnutzen, dass Abschnittsräume stets *residuiert* sind.

Jede Relation zwischen quasigeordneten Mengen $P_1, \ldots, P_n$ und Q kann auch als Relation zwischen den zugehörigen Abschnittsräumen $\mathfrak{D}P_1, \ldots, \mathfrak{D}P_n$ und $\mathfrak{D}Q$ aufgefasst werden. Das ermöglicht uns später insbesondere, die in Kapitel 3 eingeführten $(\sigma; \tau)$-Abschnittsrelationen als bestimmte Relationen zwischen Abschnittsräumen zu charakterisieren und so in die entwickelte Theorie einzuordnen (siehe Theorem 6.2.45).

$(\sigma; \tau)$-Abschnittsrelationen zwischen $P_1, \ldots, P_n$ und Q wurden definiert als untere Abschnitte von $\prod P^{-\sigma} \times Q^{\tau}$, also diejenigen Relationen $R \in \mathsf{Rel}(P; Q)$ mit $\downarrow^{(-\sigma;\tau)}_{(P;Q)} R = R$. Wir erwähnen zuerst einen nützlichen Hilfssatz zu den erzeugten Abschnitten $\downarrow^{(-\sigma;\tau)}_{(P;Q)} R$, den man leicht beweist.

Lemma 6.2.12. *Sei $(P; Q) = (P_1, \ldots, P_n; Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen und $R \in \mathsf{Rel}(P; Q)$ eine beliebige Relation. Es gilt*

$$(\downarrow^{(-\sigma;\tau)}_{(P;Q)} R)(x_1, \ldots, x_n; \_) = \downarrow^{\tau}_{Q} R^{\exists}(\downarrow^{\sigma_1}_{P_1} x_1, \ldots, \downarrow^{\sigma_n}_{P_n} x_n)$$

für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod P$. □

Mit diesem Lemma und der Residuiertheit von Abschnittsräumen ergibt sich nun aus Proposition 6.2.10 ohne Schwierigkeiten:

Proposition 6.2.13. *Sei $(P; Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen und $R \in \mathsf{Rel}(P; Q)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) R ist stetig bezüglich $\downarrow_{P_1}^{\sigma_1}$, ..., $\downarrow_{P_n}^{\sigma_n}$ und $\downarrow_Q^{\tau}$, d. h. $R \in \mathsf{CRel}(\mathfrak{D}^n P^{\sigma}; \mathfrak{D} Q^{\tau})$.

(2) $\downarrow_Q^{\tau} R^{\exists}(\downarrow_{P_1}^{\sigma_1} x_1, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n} x_n) = \downarrow_Q^{\tau} R^{\exists}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})$ für alle $x \in \prod P$.

(3) $R^{\exists}(\downarrow_{P_1}^{\sigma_1} x_1, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n} x_n) \subseteq \downarrow_Q^{\tau} R^{\exists}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})$ für alle $x \in \prod P$.

(4) Zu allen $x_i, x_i' \in P_i$, $y' \in Q$ mit $x_i' \leq_{P_i}^{\sigma_i} x_i$ $(i \in \underline{n})$ und $R(x_1', \ldots, x_n'; y')$ gibt es ein $y \in Q$ mit $R(x_1, \ldots, x_n; y)$ und $y' \leq_Q^{\tau} y$.

(5) $(\downarrow_{(P;Q)}^{(-\sigma;\tau)} R)(x_1, \ldots, x_n; \_) = \downarrow_Q^{\tau} R(x_1, \ldots, x_n; \_)$ für alle $x \in \prod P$. □

Für *Funktionen* erhalten wir hieraus die bekannte Tatsache, dass die Isotonie dasselbe ist wie die Stetigkeit bezüglich unterer Abschnitte.

Korollar 6.2.14. *Sei $(P; Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen und $f\colon P \to Q$ eine Abbildung. Es gilt*

$$f \ (\sigma;\tau)\text{-monoton} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ stetig bezüglich } \downarrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ \ldots, \ \downarrow_{P_n}^{\sigma_n} \text{ und } \downarrow_Q^{\tau}.$$

Beweis. Die $(\sigma;\tau)$-Monotonie der Funktion f entspricht gerade der Aussage (4) in Proposition 6.2.13. □

Beispiel 6.2.15. (a) Sei $(P; Q) = (P_1, \ldots, P_n; Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen. Ist $f\colon P \to Q$ eine *isotone* Funktion, d. h. $f\colon \mathfrak{D}^n P \to \mathfrak{D} Q$ stetig, so lässt sich f zu einer residuierten Familie

$$(\overrightarrow{f^{\exists}}, (\overrightarrow{f^{\exists}})^{(1)}, \ldots, (\overrightarrow{f^{\exists}})^{(n)})$$

über den Abschnittsverbänden $\mathfrak{A}P_1$, ..., $\mathfrak{A}P_n$ und $\mathfrak{A}Q$ liften. Die Komponenten dieser Familie werden wie folgt gebildet (vergleiche Theorem 3.3.12):

$$\overrightarrow{f^{\exists}}(D_1, \ldots, D_n) = \downarrow_Q f[D_1, \ldots, D_n] = \downarrow_Q \{\, f(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in D_1, \ \ldots, \ x_n \in D_n \,\}$$

und

$$(\overrightarrow{f^{\exists}})^{(i)}(D_1, \ldots, E, \ldots, D_n) = \{\, x_i : f[D_1, \ldots, \{x_i\}, \ldots, D_n] \subseteq E \,\},$$

da $(\overrightarrow{f^{\exists}})^{(i)}$ (in der i-ten Variablen) abgeschlossen ist. Wegen der Isotonie (Stetigkeit) von f gilt außerdem

$$\overrightarrow{f^{\exists}}(\downarrow_{P_1} A_1, \ldots, \downarrow_{P_n} A_n) = \downarrow_Q f^{\exists}(\downarrow_{P_1} A_1, \ldots, \downarrow_{P_n} A_n) = \downarrow_Q f[A_1, \ldots, A_n]$$

für alle $A_i \subseteq P_i$ $(i \in \underline{n})$.

(b) Wir betrachten speziell den Fall $n = 2$. Sei $(P, \cdot)$ eine binäre *geordnete Algebra* (siehe auch Bemerkung 2.1.9), also $\cdot$ eine zweistellige *isotone* Operation auf der geordneten Menge P. Dann ist $\cdot$ stetig bezüglich des Abschnittsoperators von P, und mit dem Komplexprodukt $A \cdot B = \{\, x \cdot y : x \in A, \ y \in B \,\} \in \mathcal{P}|P|$ nach Beispiel 3.3.14 erhält man aus der geordneten algebraischen Struktur $(P, \cdot)$ eine *vollständige* und *residuierte* Struktur $(\mathfrak{A}P, \bullet, \leftarrow, \rightarrow)$ mit

$$C \bullet D = \downarrow_P (C \cdot D)$$

und den beiden Residualen $E \leftarrow D = \{\, x \in P : \{x\} \cdot D \subseteq E \,\}$ und $C \rightarrow E = \{\, y \in P : C \cdot \{y\} \subseteq E \,\}$. Dies ist gerade der Spezialfall von Beispiel 6.2.11 für residuierte Hüllenräume.

Nach den Abschnittsräumen kehren wir wieder zu beliebigen Hüllenräumen zurück und stellen als nächstes einige wichtige Charakterisierungen von *zweistelligen* stetigen Relationen R zusammen. Wir erinnern dafür an die Schreibweisen $\langle R\rangle = R^{\exists}$ und $\langle R\rangle^* = (R^{-1})^{\exists}_{(-;-)} = [R^{\mathrm{d}}]$ aus Beispiel 3.3.13.

Korollar 6.2.16. *Sei R eine Relation zwischen Hüllenräumen X und Y, und sei $\mathcal{M}$ eine $\bigwedge$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{C}Y$. Es sind äquivalent:*

(1) R ist stetig.

(2) $\overline{\overline{A}R} = \overline{AR}$ für alle $A \subseteq X$.

(3) $\overline{A}R \subseteq \overline{AR}$ für alle $A \subseteq X$.

(4) R^{d} ist $(-;-)$-abgeschlossen.

(5) Für alle $B \in \mathcal{C}Y$ ist $-(R(-B)) \in \mathcal{C}X$.

(6) Für alle $B \in \mathcal{C}Y$ ist $\{\, x : xR \subseteq B \,\} \in \mathcal{C}X$.

(7) Für alle $M \in \mathcal{M}$ ist $\{\, x : \forall y(x\ R\ y \Rightarrow y \in M) \,\} \in \mathcal{C}X$.

(8) $(\overrightarrow{\langle R\rangle}, \overrightarrow{[R^{\mathrm{d}}]})$ ist eine Adjunktion zwischen $\mathfrak{C}X$ und $\mathfrak{C}Y$.

(9) $\overrightarrow{\langle R\rangle}$ ist residuiert und $\overline{\{x\}}R \subseteq \overline{xR}$ für alle $x \in X$.

(10) Es gibt eine residuierte Abbildung $\Phi\colon \mathfrak{C}X \to \mathfrak{C}Y$ mit

$$\Phi(\overline{\{x\}}) = \overline{\langle R\rangle(\{x\})} = \overline{xR} \quad \textit{für alle } x \in X.$$

(11) Es gibt eine dual residuierte Abbildung $\Psi\colon \mathfrak{C}Y \to \mathfrak{C}X$ mit

$$\Psi(M) = [R^{\mathrm{d}}](M) \quad \textit{für alle } M \in \mathcal{M}.$$

In diesem Fall sind Φ und Ψ eindeutig bestimmt durch $\Phi = \overrightarrow{\langle R\rangle}$ und $\Psi = \overrightarrow{[R^{\mathrm{d}}]}$, also

$$\Phi(C) = \overline{\langle R\rangle(C)} \quad \textit{für alle } C \in \mathcal{C}X, \qquad \Psi(D) = [R^{\mathrm{d}}](D) \quad \textit{für alle } D \in \mathcal{C}Y.$$

Beweis. Nach Proposition 6.2.10 sowie Theorem 5.2.2 und Korollar 5.2.3. □

Bemerkung 6.2.17. In der klassischen Topologie gibt es verschiedene Stetigkeitsbegriffe für Relationen zwischen topologischen Räumen X und Y, die üblicherweise über Multifunktionen definiert werden. Unter einer *Multifunktion* (oder *mehrwertigen Funktion*) F von X in Y versteht man eine gewöhnliche Abbildung $F\colon X \to \mathcal{P}Y$, und die Multifunktionen von X in Y korrespondieren offensichtlich bijektiv mit den Relationen zwischen X und Y (via $F \mapsto R_F$, $x\ R_F\ y \Leftrightarrow y \in F(x)$).

Einen guten Überblick über die Stetigkeit für Multifunktionen (und damit für Relationen) gibt Berge [5]. Überträgt man die dort angegebenen Definitionen in geeigneter Formulierung auf allgemeine Hüllenräume, so entspricht der Stetigkeit binärer Relationen in unserem Sinne gerade die *Unterhalbstetigkeit*.

Beispiel 6.2.18. Sei R eine binäre Relation zwischen quasigeordneten Mengen P und Q. Die Stetigkeit von R bezüglich der Abschnittsoperatoren von P und Q ist äquivalent zur schwachen Stetigkeit von $R^{\exists}$, d. h. zu $R^{\exists} \circ {\downarrow_P} \leq {\downarrow_Q} \circ R^{\exists}$. Wegen ${\downarrow} = {\geq^{\exists}}$ gilt somit nach Theorem 3.3.7 und Korollar 3.3.15

$$R : \mathfrak{D}P \rightharpoonup \mathfrak{D}Q \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad R \circ {\geq_P} \subseteq {\geq_Q} \circ R,$$

was sich natürlich ebenso an Proposition 6.2.13 ablesen lässt. Diese Stetigkeitsbedingung tritt in den Anwendungen beispielsweise in [16] auf.

Eine Abbildung $f\colon P \to Q$ ist nach der obigen Bedingung genau dann isoton, wenn sie $f \circ {\geq_P} \subseteq {\geq_Q} \circ f$ erfüllt.

Wir haben gesehen, dass die Stetigkeit einer binären Relation $R : X \rightharpoonup Y$ zwischen Hüllenräumen gleichbedeutend ist mit der $(-;-)$-*Abgeschlossenheit* von $R^{\mathrm{d}} : Y \rightharpoonup X$. Sie ist jedoch im allgemeinen *nicht* zur Abgeschlossenheit von R^{d} äquivalent! Für Funktionen $f\colon X \to Y$ stellt sich dies allerdings anders dar, denn nach Beispiel 3.3.13 gilt

$$(f^{\mathrm{d}})^{\exists}_{(-;-)} = (f^{\exists})^{*} = f_{\leftarrow} = (f^{\mathrm{d}})^{\exists}.$$

Die $(-;-)$-Abgeschlossenheit von f^{d} ist daher dasselbe wie die Abgeschlossenheit. Im Falle von Funktionen zwischen Hüllenräumen lässt sich die Stetigkeit demnach wie üblich dadurch charakterisieren, dass Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind. Direkt zeigt sich dies auch an Aussage (5) in Korollar 6.2.16, da für alle Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $B \subseteq Y$ gilt: $-(f^{-1}[-B]) = f^{-1}[B]$.

Im nächsten Korollar geben wir noch weitere Beschreibungen der üblichen Stetigkeit von Funktionen zwischen Hüllenräumen an, die sich aus den Resultaten für Relationen ergeben. Die meisten der folgenden Charakterisierungen sind bereits aus der Topologie bekannt oder finden sich in [27]. Interessant ist hingegen die Aussage (8): Wie man weiß, ist einerseits jede stetige Abbildung isoton hinsichtlich der Spezialisierungsordnungen, und andererseits induziert jede stetige Funktion $f\colon X \to Y$ eine residuierte Abbildung $\Phi\colon \mathfrak{C}X \to \mathfrak{C}Y$ durch $\Phi(C) = \overline{f[C]}$. Die Umkehrungen sind im allgemeinen jeweils falsch. Aus beiden Folgerungen zusammen lässt sich die Stetigkeit jedoch zurückgewinnen.

Korollar 6.2.19. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen Hüllenräumen X, Y, und sei $\mathcal{M}$ eine $\bigwedge$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{C}Y$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist stetig (d. h. $f_{\to}\colon \bar{\mathfrak{P}}X \to \bar{\mathfrak{P}}Y$ ist stetig).

(2) $\overline{f[\overline{A}]} = \overline{f[A]}$ für alle $A \subseteq X$.

(3) $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ für alle $A \subseteq X$.

(4) f^{d} ist abgeschlossen (d. h. $f_{\leftarrow}\colon \bar{\mathfrak{P}}Y \to \bar{\mathfrak{P}}X$ ist abgeschlossen).

(5) Für alle $B \in \mathcal{C}Y$ ist $f^{-1}[B] \in \mathcal{C}X$.

(6) Für alle $M \in \mathcal{M}$ ist $f^{-1}[M] \in \mathcal{C}X$.

(7) $(\overrightarrow{f_{\to}}, \overrightarrow{f_{\leftarrow}})$ ist eine Adjunktion zwischen $\mathfrak{C}X$ und $\mathfrak{C}Y$.

(8) $\overrightarrow{f_{\to}}$ ist residuiert, und $f\colon \mathfrak{O}X \to \mathfrak{O}Y$ ist isoton.

(9) Es gibt eine residuierte Abbildung $\Phi\colon \mathfrak{C}X \to \mathfrak{C}Y$ *mit* $\Phi \circ \mathsf{p}_X = \mathsf{p}_Y \circ f$.

(10) Es gibt eine dual residuierte Abbildung $\Psi\colon \mathfrak{C}Y \to \mathfrak{C}X$ *mit* $\Psi(M) = f^{-1}[M]$ *für alle* $M \in \mathcal{M}$.

In diesem Fall sind Φ *und* Ψ *eindeutig bestimmt durch* $\Phi = \overrightarrow{f_\to}$ *und* $\Psi = \overrightarrow{f_\leftarrow}$, *also*

$$\Phi(C) = \overline{f[C]} \quad \textit{für alle } C \in \mathcal{C}X, \qquad \Psi(D) = f^{-1}[D] \quad \textit{für alle } D \in \mathcal{C}Y.$$

Beweis. Es ist $f^\exists = \langle f \rangle = f_\to$ und $(f^\exists)^* = (f^{\mathrm{d}})^\exists_{(-;-)} = [f^{\mathrm{d}}] = \langle f^{\mathrm{d}} \rangle = (f^{\mathrm{d}})^\exists = f_\leftarrow$. Die Behauptungen ergeben sich somit aus Korollar 6.2.16. Für die zweite Hälfte von Aussage (8) verwendet man dabei

$$\begin{aligned}(\forall y \in X)(f[\overline{\{y\}}] \subseteq \overline{\{f(y)\}}) \quad &\iff \quad (\forall x, y \in X)(x \in \overline{\{y\}} \Rightarrow f(x) \in \overline{\{f(y)\}}) \\ &\iff \quad (\forall x, y \in X)(x \leq_X y \Rightarrow f(x) \leq_Y f(y)).\end{aligned}$$ □

Beispiel 6.2.20. Seien P und Q quasigeordnete Mengen. Ist $f\colon P \to Q$ eine isotone Abbildung, d. h. $f\colon \mathfrak{D}P \to \mathfrak{D}Q$ stetig, so induziert f bekanntlich eine Adjunktion (Φ, Ψ) zwischen den Abschnittsverbänden $\mathfrak{A}P$ und $\mathfrak{A}Q$ durch die Festlegung

$$\Phi(D) = {\downarrow_Q} f[D], \qquad \Psi(E) = f^{-1}[E] \qquad (D \in \mathfrak{A}P,\ E \in \mathfrak{A}Q).$$

Das ergibt sich nun mit $\Phi = \overrightarrow{f_\to}$ und $\Psi = \overrightarrow{f_\leftarrow}$ aus Korollar 6.2.19 (und für $n = 1$ auch aus Beispiel 6.2.15).

Neben den Abschnittsräumen liefern auch die *Schnitträume* wichtige Beispiele stetiger Funktionen:

Beispiel 6.2.21. Seien L und M vollständige Verbände. Für jede Abbildung $\varphi\colon L \to M$ gilt:

$$\varphi \text{ residuiert} \quad \iff \quad \varphi \text{ stetig bezüglich } \Delta_L \text{ und } \Delta_M.$$

Denn für jeden vollständigen Verband N ist $\mathcal{C}\mathfrak{M}N = \mathcal{N}N = \{\,{\downarrow}x : x \in N\,\}$, d. h. das Hüllensystem des Schnittraums $\mathfrak{M}N = (|N|, \Delta_N)$ besteht aus den Hauptidealen von N. Die Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{M}L \to \mathfrak{M}M$ ist somit genau dann stetig, wenn Urbilder von Hauptidealen unter φ wieder Hauptideale sind – und dies ist gerade die Residuiertheit von φ.

Die *schnittstetigen* Abbildungen zwischen quasigeordneten Mengen werden unter anderem in [32] betrachtet.

Abschließend stellen wir einen Zusammenhang her zwischen der Stetigkeit mehrstelliger und der Stetigkeit binärer Relationen. Damit lassen sich viele Charakterisierungen der Stetigkeit mehrstelliger Relationen aus dem zweistelligen Spezialfall zurückgewinnen.

Lemma 6.2.22. *Eine* $(n+1)$*-stellige Relation* $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ *ist genau dann stetig, wenn für alle* $i \in \underline{n}$ *und alle* $x \in \prod_{k=1}^n |X_k|$ *die binäre Relation* $R_i^x \in \mathsf{Rel}(X_i, Y)$ *stetig ist.*

Beweis. Nach Theorem 5.3.16 ist die Stetigkeit der n-stelligen Abbildung $R^\exists$ dazu äquivalent, dass für alle $i \in \underline{n}$ und alle $x \in \prod_{k=1}^n |X_k|$ die einstellige Abbildung $(R^\exists)_i^{(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})}$ stetig ist. Mit Proposition 3.3.26 folgt somit die Behauptung. □

6.2.3 Vollstetige Relationen

Durch die kanonische Zuordnung $R \mapsto \overrightarrow{R^{\exists}}$ erhält man aus den stetigen Relationen zwischen Hüllenräumen $X_1, \ldots, X_n$ und Y sämtliche residuierten Abbildungen zwischen den Hüllenverbänden $\mathfrak{C}X_1, \ldots, \mathfrak{C}X_n$ und $\mathfrak{C}Y$. Nach Theorem 6.2.8 reichen hierfür bereits die *vollstetigen* Relationen aus (und auch nicht weniger als diese). Insofern gilt unser Interesse im folgenden der Charakterisierung vollstetiger Relationen und außerdem der Beschreibung der vollstetigen Hülle, die zu jeder stetigen Relation die kleinste sie umfassende vollstetige Relation liefert.

Die vollstetige Hülle lässt sich ähnlich wie die behandelten Grundbegriffe über $R \mapsto R^{\exists}$ vom abstrakten Rahmen (siehe Definition 5.3.28) auf Relationen zwischen Hüllenräumen übertragen.

Definition 6.2.23 (Vollstetige Hülle für Relationen)**.** Für eine stetige $(n+1)$-stellige Relation $R \in \mathsf{CRel}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ zwischen Hüllenräumen sei

$$R^{\Gamma} := (\overline{R^{\exists}})_{\exists}$$

die *vollstetige Hülle* von R.

Nach Definition der vollstetigen Hülle gilt somit für jede stetige Relation R

$$(R^{\Gamma})^{\exists} = \overline{R^{\exists}}. \tag{6.1}$$

Proposition 6.2.24. *Die vollstetige Hülle besitzt die folgenden grundlegenden Eigenschaften:*

(a) Für jede stetige Relation $R \in \mathsf{CRel}(X; Y)$ ist R^{Γ} vollstetig, also $R^{\Gamma} \in \mathsf{CCRel}(X; Y)$.

(b) Für jedes $R \in \mathsf{CRel}(X; Y)$ und alle $x_i \in X_i$ ($i \in \underline{n}$) ist

$$R^{\Gamma}(x_1, \ldots, x_n; \_) = \overline{R(x_1, \ldots, x_n; \_)}.$$

Im Fall binärer Relationen R (d. h. $n = 1$) ist somit $x(R^{\Gamma}) = \overline{xR}$.

(c) Die vollstetige Hülle $R \mapsto R^{\Gamma}$ ist eine Hüllenoperation auf $\mathsf{CRel}(X; Y)$, und der zugehörige Hüllenbereich ist $\mathsf{CCRel}(X; Y)$.

(d) $\mathsf{CCRel}(X; Y)$ ist ein vollständiger Verband, in dem Suprema wie folgt gebildet werden: $\bigvee \mathcal{R} = (\bigcup \mathcal{R})^{\Gamma}$ für alle $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{CCRel}(X; Y)$.

Beweis. R^{Γ} ist vollstetig, da $(R^{\Gamma})^{\exists} = \overline{R^{\exists}}$ eine vollstetige Abbildung ist. Mit Proposition 5.3.30 erhält man für jedes $R \in \mathsf{CRel}(X; Y)$

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n, y) \in R^{\Gamma} \quad &\iff \quad y \in \overline{R^{\exists}}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}) \\ &\iff \quad y \in \overline{R^{\exists}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})} \\ &\iff \quad y \in \overline{R(x_1, \ldots, x_n; \_)}. \end{aligned}$$

Dass $R \mapsto R^{\Gamma}$ eine Hüllenoperation mit dem Hüllenbereich $\mathsf{CCRel}(X; Y)$ ist, folgt aus Korollar 5.3.29. Damit ergibt sich auch die Bildung des Supremums in $\mathsf{CCRel}(X; Y)$ (die Vollständigkeit von $\mathsf{CCRel}(X; Y)$ wurde bereits in Theorem 6.2.8 formuliert). $\square$

Die vollstetige Hülle einer stetigen Relation R ist die kleinste vollstetige Relation, die R umfasst. Sie ist außerdem die größte stetige Relation S, die dieselbe residuierte Abbildung zwischen Hüllenverbänden induziert wie R:

Theorem 6.2.25. *Für jede Relation $R \in \mathsf{Rel}(X;Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) R ist vollstetig.

(2) R ist stetig und $R = R^\Gamma$.

(3) R ist stetig und $R(x_1, \ldots, x_n; \_) \in \mathcal{C}Y$ für alle $x \in \prod_{i=1}^n |X_i|$.

(4) $R = \max\{\, S \in \mathsf{CRel}(X_1, \ldots, X_n; Y) : \overrightarrow{S^\exists} = \overrightarrow{R^\exists} \,\}$.

(5) $R = \bigcup\{\, S \in \mathsf{CRel}(X_1, \ldots, X_n; Y) : \Gamma_Y \circ S^\exists = \Gamma_Y \circ R^\exists \,\}$.

Beweis. Nach Proposition 5.3.31 sowie Proposition 6.2.24 und Lemma 6.2.7. □

Für eine stetige Relation zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und Y berechnet man die vollstetige Hülle durch

$$(x_1, \ldots, x_n; y) \in R^\Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \Gamma_Y(\{\, z \in Y : (x_1, \ldots, x_n; z) \in R \,\}).$$

Wie sieht die vollstetige Hülle speziell für stetige Funktionen $f\colon (X_1, \ldots, X_n) \to Y$ aus? Das nächste Lemma liefert eine Beschreibung mit Hilfe der Spezialisierung von Y.

Lemma 6.2.26. *Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gilt*

$$(x; y) \in f^\Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \overline{\{f(x)\}} = {\downarrow_Y} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y \le_Y f(x)$$

für alle $(x; y) \in \prod_{i=1}^n |X_i| \times |Y|$, und es ist

$$(f^\Gamma)^\exists = \overline{f^\exists} = {\downarrow_Y} \circ f^\exists.$$

Beweis. Der erste Teil ist klar, und der zweite folgt aus

$$(f^\Gamma)^\exists(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}) = f^\Gamma(x_1, \ldots, x_n; \_) = {\downarrow_Y} f(x_1, \ldots, x_n) = {\downarrow_Y} f[\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}]$$

mit der Residuiertheit von $(f^\Gamma)^\exists$ und ${\downarrow_Y} \circ f^\exists$. □

Für eine einstellige stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen Hüllenräumen X und Y ist demnach $(f^\Gamma)^\exists = {\downarrow_Y} \circ f_\to$ und außerdem $f^\Gamma = {\ge_Y} \circ f$.

Beispiel 6.2.27. Für jede quasigeordnete Menge P sind nach Proposition 6.1.22 sowohl die Spezialisierung des Schnittraums $\mathfrak{M}P$ als auch die Spezialisierung des Abschnittsraums $\mathfrak{D}P$ durch die Quasiordnung $\le_P$ gegeben.

Ist $\varphi\colon L \to M$ eine residuierte Abbildung zwischen vollständigen Verbänden L und M, d. h. $\varphi\colon \mathfrak{M}L \to \mathfrak{M}M$ stetig (siehe Beispiel 6.2.21), so gilt also nach Lemma 6.2.26

$$x\ \varphi^\Gamma\ y \quad \Longleftrightarrow \quad y \le_M \varphi(x).$$

Ist $f\colon P \to Q$ eine isotone Abbildung zwischen quasigeordneten Mengen P und Q, also $f\colon \mathfrak{D}P \to \mathfrak{D}Q$ stetig (siehe Korollar 6.2.14), so ergibt sich ebenso

$$x\ f^\Gamma\ y \quad \Longleftrightarrow \quad y \le_Q f(x).$$

Beispiel 6.2.28. Seien P und Q quasigeordnete Mengen und $R : \mathfrak{D}P \rightharpoondown \mathfrak{D}Q$ eine stetige Relation zwischen den Abschnittsräumen. Dann gilt $R \circ {\geq_P} \subseteq {\geq_Q} \circ R$ (siehe Beispiel 6.2.18). Da Abschnittsräume residuiert sind, gilt $(R^\Gamma)^\exists = \overline{R^\exists} = {\downarrow_Q} \circ R^\exists$ (vergleiche auch Proposition 5.2.24) und somit für die vollstetige Hülle

$$R^\Gamma = (\overline{R^\exists})_\exists = {\geq_Q} \circ R.$$

Laut der Charakterisierung aus Theorem 6.2.25 ist daher ${\geq_Q} \circ R$ die größte stetige Relation $S : \mathfrak{D}P \rightharpoondown \mathfrak{D}Q$, die $[S^\mathrm{d}](D) = [R^\mathrm{d}](D)$ für alle $D \in \mathcal{A}Q$ erfüllt.

Auch für die Vollstetigkeit gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen binären und mehrstelligen Relationen, die diese Eigenschaft besitzen:

Lemma 6.2.29. *Eine $(n+1)$-stellige Relation $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \dots, X_n; Y)$ ist genau dann vollstetig, wenn für alle $i \in \underline{n}$ und alle $x \in \prod_{k=1}^n |X_k|$ die binäre Relation $R_i^x \in \mathsf{Rel}(X_i, Y)$ vollstetig ist.*

Für alle $R \in \mathsf{CRel}(X_1, \dots, X_n; Y)$ und jedes $i \in \underline{n}$ ist $(R^\Gamma)_i^x = (R_i^x)^\Gamma$.

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich analog zu Lemma 6.2.22 mit Lemma 5.3.32, die zweite prüft man leicht direkt nach oder verwendet Lemma 5.3.33. □

Zu Beginn des Kapitels haben wir in Proposition 6.1.12 gesehen, dass für jeden Hüllenraum X der Hüllenoperator Γ_X bezüglich des Abschnittsoperators $\downarrow_X$ bindend ist. Analoges gilt interessanterweise für Abbildungen $R^\exists$, falls R eine vollstetige Relation ist.

Proposition 6.2.30. *Für jede vollstetige Relation $R \in \mathsf{CCRel}(X_1, \dots, X_n; Y)$ ist $R^\exists$ bindend bezüglich $\downarrow_{X_1}$, …, $\downarrow_{X_n}$ und $\downarrow_Y$.*

Beweis. Für alle $x_i \in X_i$ ($i \in \underline{n}$) gilt aufgrund von Proposition 6.1.12 und der Vollstetigkeit von R

$$\begin{aligned} {\downarrow_Y} R^\exists({\downarrow_{X_1}} x_1, \dots, {\downarrow_{X_n}} x_n) &\subseteq {\downarrow_Y} \overline{R^\exists({\downarrow_{X_1}} x_1, \dots, {\downarrow_{X_n}} x_n)} = \overline{R^\exists(\overline{\{x_1\}}, \dots, \overline{\{x_n\}})} \\ &= R^\exists(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}), \end{aligned}$$

wegen der Residuiertheit von $R^\exists$ also ${\downarrow_Y} \circ R^\exists \circ ({\downarrow_{X_1}}, \dots, {\downarrow_{X_n}}) \leq R^\exists$. Da $R^\exists$ isoton ist, folgt damit die Behauptung. □

Die vollstetige Hülle R einer stetigen Funktionen $f\colon (X_1, \dots, X_n) \to Y$ ist gegeben durch $R(x_1, \dots, x_n; \_) = \overline{\{f(x_1, \dots, x_n)\}}$. In den Anwendungen kommt es häufiger vor, dass eine Relation auf diese Weise aus einer Funktion erzeugt wird. Wir führen dafür die folgende Sprechweise ein:

Definition 6.2.31 (Funktionale Relationen)**.** Eine Relation R zwischen X_1, …, X_n und Y heißt *funktional*,[1] wenn es eine Funktion $f\colon (X_1, \dots, X_n) \to Y$ gibt, so dass

$$R(x_1, \dots, x_n; \_) = \overline{\{f(x_1, \dots, x_n)\}}$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n |X_i|$ gilt. In diesem Fall sagen wir, R werde von der Funktion f *erzeugt*, und nennen f auch eine *erzeugende Funktion* von R.

1 In der Literatur werden manchmal auch linkstotale und rechtseindeutige Relationen – nach unserer Definition also Funktionen – funktional genannt. Das ist hier ausdrücklich nicht der Fall: Funktionale Relationen sind im allgemeinen keine Funktionen, sondern werden von Funktionen erzeugt.

Die erzeugende Funktion einer funktionalen Relation ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit gilt allerdings für differenzierte Hüllenräume: Wird $R \in \mathsf{Rel}(X; Y)$ durch zwei Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ erzeugt und ist Y differenziert, so folgt aus $\overline{\{f(x)\}} = R(x; \_) = \overline{\{g(x)\}}$ wegen der Differenziertheit $f(x) = g(x)$.

Die von einer stetigen Funktion erzeugte funktionale Relation ist offensichtlich bereits vollstetig:

Lemma 6.2.32. *Sei $R \in \mathsf{Rel}(X; Y)$ eine Relation und $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. R wird genau dann von f erzeugt, wenn $R = f^\Gamma$ gilt. In diesem Fall ist R also vollstetig.*

Ist der Hüllenraum Y differenziert, so gilt außerdem $f^\Gamma = g^\Gamma \Rightarrow f = g$ für jede weitere stetige Funktion $g\colon X \to Y$. □

Problemlos lassen sich auch die nächsten beiden Propositionen zeigen, die wir ohne Beweis angeben. Aus der ersten ist ersichtlich, dass jede erzeugende Funktion einer vollstetigen, funktionalen Relation schon stetig sein muss.

Proposition 6.2.33. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Es gilt*

$$f \text{ stetig} \iff R \text{ stetig} \iff R \text{ vollstetig},$$

falls $R \in \mathsf{Rel}(X; Y)$ die durch f erzeugte funktionale Relation ist. □

Die zweite Proposition zeigt, dass die durch funktionale, vollstetige Relationen induzierten Abbildungen zwischen Hüllenverbänden Punktabschlüsse bewahren:

Proposition 6.2.34. *Eine vollstetige Relation $R \in \mathsf{CCRel}(X; Y)$ ist genau dann funktional, wenn es zu allen $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n |X_i|$ ein $y \in |Y|$ gibt mit*

$$\overrightarrow{R}^{\exists}(\overline{\{x_1\}}, \ldots, \overline{\{x_n\}}) = R(x_1, \ldots, x_n; \_) = \overline{\{y\}}.$$

Ist Y differenziert, so ist darüber hinaus die stetige Funktion $f\colon X \to Y$ mit $R = f^\Gamma$ eindeutig bestimmt und $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. In diesem Fall wird das Auswahlaxiom für den Beweis nicht benötigt. □

6.2.4 Bindungen

Nachdem wir bisher mit Hilfe von $(\sigma; \tau)$-Axialitäten einige Grundbegriffe für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen auf Relationen zwischen Hüllenräumen übertragen haben, verwenden wir nun Polaritäten, also die Korrespondenzen $R \mapsto R^\forall$. Damit gelangen wir von *bindenden* $([+]; -)$-residuierten Abbildungen zu sogenannten *Bindungen* zwischen Hüllenräumen. Diese stellen eine Verallgemeinerung der aus der Formalen Begriffsanalyse bekannten Bindungen dar (siehe [44]), worauf wir später noch näher eingehen.

Definition 6.2.35 (Bindungen)**.** Eine Relation R zwischen Hüllenräumen $X_1, \ldots, X_n$ und Y heißt *Bindung*, wenn die Abbildung $R^\forall\colon \bar{\mathfrak{P}}^n X \to \bar{\mathfrak{P}} Y$ bindend ist, d. h. falls gilt:

$$\Gamma_Y \circ R^\forall \circ \Gamma_X = R^\forall.$$

Die durch Mengeninklusion geordnete Menge aller Bindungen zwischen $X_1, \ldots, X_n$ und Y wird mit

$$\mathsf{Bond}(X_1, \ldots, X_n; Y)$$

bezeichnet.

Lemma 6.2.36. $\mathsf{Bond}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ *ist ein vollständiger Verband, in dem das Infimum durch den mengentheoretischen Durchschnitt gegeben ist.*

Die Menge aller Bindungen zwischen $X_1, \ldots, X_n, Y$ *ist somit ein Hüllensystem auf* $\prod_{i=1}^n |X_i| \times |Y|$.

Beweis. Nach Proposition 2.2.28, Proposition 4.2.29 und Korollar 3.3.21. □

Für jede Relation $R \in \mathsf{Rel}(X; Y)$ zwischen Hüllenräumen ist bekanntermaßen $R^\forall$ eine $([+]; -)$-residuierte Abbildung von $\bar{\mathfrak{P}}^n X$ in $\bar{\mathfrak{P}} Y$ und

$$\overrightarrow{R^\forall} = \Gamma_Y^\bullet \circ R^\forall \circ \Gamma_X^\circ \colon \mathfrak{C}^n X \to \mathfrak{C} Y$$

die kanonisch induzierte Abbildung zwischen den zugehörigen Hüllenverbänden. Ist R eine Bindung, so gilt nach Definition für alle $A_i \subseteq X_i$ $(i \in \underline{n})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R^\forall}(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}) &= \overline{R^\forall(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n})} = R^\forall(A_1, \ldots, A_n) \\ &= \{\, y : \forall x_1 \ldots \forall x_n \big((x_1 \in A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_n \in A_n) \Rightarrow R(x_1, \ldots, x_n; y)\big) \,\}. \end{aligned}$$

Aus den allgemeinen Ergebnissen für Hüllenstrukturen aus dem vorigen Kapitel erhalten wir nun die beiden zentralen Theoreme zu $\mathsf{Bond}(X; Y)$. Das erste beschreibt, wie sich über allgemeine Polaritäten alle $([+]; -)$-residuierten Abbildungen zwischen Hüllenverbänden durch Bindungen zwischen Hüllenräumen realisieren lassen.

Theorem 6.2.37. *Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{Bond}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ *der Bindungen zwischen* $X_1, \ldots, X_n$ *und* Y *und*
- $\mathsf{res}_{([+];-)}(\mathfrak{C}X_1, \ldots, \mathfrak{C}X_n; \mathfrak{C}Y)$ *der* $([+]; -)$*-residuierten Abbildungen von* $\mathfrak{C}X_1, \ldots, \mathfrak{C}X_n$ *in* $\mathfrak{C}Y$

sind isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen

$$R \mapsto \overrightarrow{R^\forall} \quad \textit{und} \quad \Phi \mapsto (\overleftarrow{\Phi})_\forall.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus Theorem 5.3.40 und Korollar 3.3.21. Man beachte dabei

$$\mathsf{bres}_{([+];-)}(\mathfrak{C}^n X; \mathfrak{C}Y) = \mathsf{ccres}_{([+];-)}(\mathfrak{C}^n X; \mathfrak{C}Y),$$

siehe auch Proposition 5.3.8. □

Im zweiten Theorem wird erläutert, wie die Residuale der induzierten $([+]; -)$-residuierten Abbildungen gebildet werden.

Theorem 6.2.38. *Für jede Bindung* R *zwischen* $X_1, \ldots, X_n$ *und* Y *ist*

$$\overrightarrow{R^\forall} \colon (\mathfrak{C}X_1, \ldots, \mathfrak{C}X_n) \to \mathfrak{C}Y$$

eine $([+]; -)$*-residuierte Abbildung mit dem i-ten* $([+]; -)$*-Residual* $(i \in \underline{n})$

$$(\overrightarrow{R^\forall})^{(i)}_{([+];-)} = \overrightarrow{(R^\forall)^{(i)}_{([+];-)}} = \overrightarrow{(R^{-i})^\forall}.$$

Beweis. Nach Theorem 5.3.35 und Theorem 3.3.22. □

Mit R ist auch die i-te konverse Relation R^{-i} eine Bindung:

Lemma 6.2.39. *Für alle Relationen $R \in \mathsf{Rel}(X; Y)$ und jedes $i \in \underline{n}$ gilt*

$$R \in \mathsf{Bond}(X_1, \dots, X_n; Y) \quad \Longleftrightarrow \quad R^{-i} \in \mathsf{Bond}(X_1, \dots, Y, \dots, X_n; X_i).$$

Insbesondere ist also eine binäre Relation $R : X \rightharpoonup Y$ zwischen Hüllenräumen genau dann eine Bindung, wenn die duale Relation $R^{\mathrm{d}} : Y \rightharpoonup X$ eine Bindung ist.

Beweis. Dies folgt wegen $(R^{\forall})^{(i)}_{([+];-)} = (R^{-i})^{\forall}$ aus Korollar 5.3.10. □

Demnach wird für jede Bindung $R \in \mathsf{Bond}(X; Y)$ das i-te Residual der induzierten Abbildung zwischen den Hüllenverbänden wie folgt berechnet:

$$(\overrightarrow{R^{\forall}})^{(i)}_{([+];-)}(\overline{A_1}, \dots, \overline{B}, \dots, \overline{A_n}) = (R^{-i})^{\forall}(A_1, \dots, B, \dots, A_n)$$

für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n} \setminus \{i\})$, $B \subseteq Y$.

Wir stellen nun eine ganze Reihe von Charakterisierungen zusammen, die sich für Bindungen leicht aus den allgemeineren Resultaten zu bindenden $([+]; -)$-residuierten Abbildungen ergeben. Es vereinfacht die Formulierung, X_{n+1} für Y zu schreiben.

Theorem 6.2.40. *Für jede Relation R zwischen Hüllenräumen X_1, …, X_n und X_{n+1} sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) R ist eine Bindung.

(2) Für alle $i \in \underline{n+1}$ und alle $x \in \prod_{k=1}^{n+1} |X_k|$ ist

$$R(x_1, \dots, x_{i-1}, \_, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{C}X_i.$$

(3) Für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n})$ gilt

$$\overline{R^{\forall}(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n})} = R^{\forall}(A_1, \dots, A_n).$$

(4) Für alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n})$ und alle $i \in \underline{n}$ gilt

$$\overline{R^{\forall}(A_1, \dots, \overline{A_i}, \dots, A_n)} = R^{\forall}(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

(5) Für alle $x \in \prod_{k=1}^{n} |X_k|$, jedes $i \in \underline{n}$ und alle $A_i \subseteq X_i$ gilt

$$\overline{R^{\forall}(\{x_1\}, \dots, \overline{A_i}, \dots, \{x_n\})} = R^{\forall}(\{x_1\}, \dots, A_i, \dots, \{x_n\})$$

(6) Für jedes $i \in \underline{n}$ und alle $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n})$, $B \subseteq X_{n+1}$ ist

$$(R^{-i})^{\forall}(A_1, \dots, B, \dots, A_n) \in \mathcal{C}X_i \quad \textit{und} \quad R^{\forall}(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{C}X_{n+1}.$$

(7) Für jedes $i \in \underline{n}$ und alle $(x_1, \dots, x_n; y) \in \prod_{k=1}^{n+1} |X_k|$ ist

$$(R^{-i})^{\forall}(\{x_1\}, \dots, \{y\}, \dots, \{x_n\}) \in \mathcal{C}X_i \quad \textit{und} \quad R^{\forall}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}) \in \mathcal{C}X_{n+1}.$$

(8) *Für alle* $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n+1})$ *und alle* $i \in \underline{n+1}$ *gilt*

$$A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_{n+1} \subseteq R \quad \Longrightarrow \quad A_1 \times \ldots \times \overline{A_i} \times \ldots \times A_{n+1} \subseteq R.$$

(9) *Für alle* $i \in \underline{n+1}$, $A_i \subseteq X_i$ *und* $x \in \prod_{k=1}^{n+1} |X_k|$ *gilt*

$$\{x_1\} \times \ldots \times A_i \times \ldots \times \{x_{n+1}\} \subseteq R \quad \Longrightarrow \quad \{x_1\} \times \ldots \times \overline{A_i} \times \ldots \times \{x_{n+1}\} \subseteq R.$$

(10) *Für alle* $A_k \subseteq X_k$ $(k \in \underline{n+1})$ *gilt*

$$A_1 \times \ldots \times A_{n+1} \subseteq R \quad \Longrightarrow \quad \overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_{n+1}} \subseteq R.$$

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (3) gilt nach Definition einer Bindung, und (1) $\Leftrightarrow$ (4) erhält man mit Theorem 4.2.28. Die Äquivalenz von (1) zu jeder der Aussagen (5)–(7) folgt aus Theorem 5.3.9. Beachte für (6) und (7), dass

$$(R^{\forall})^{(i)}_{([+];-)} = (R^{-i})^{\forall}$$

gilt. Aussage (2) ist nur eine andere Formulierung von (7). Die Äquivalenz (6) $\Leftrightarrow$ (8) ergibt sich aus Theorem 3.3.23, denn für jeden Hüllenraum X und alle $C \subseteq X$ ist genau dann $C \in \mathcal{C}X$, wenn $(A \subseteq C \Rightarrow \overline{A} \subseteq C)$ für alle $A \subseteq X$ gilt (siehe Lemma 1.2.25). (7) $\Leftrightarrow$ (9) erhält man analog zu (6) $\Leftrightarrow$ (8). Zu (8) $\Leftrightarrow$ (10): Durch iterierte Anwendung von (8) folgt (10); die Umkehrung ist klar wegen

$$A_1 \times \ldots \times \overline{A_i} \times \ldots \times A_{n+1} \subseteq \overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_{n+1}}. \qquad \square$$

Besonders interessant sind hierbei die Beschreibungen von Bindungen in den Aussagen (2) und (10). Mit ihnen lässt sich erkennen, dass viele separat in der Literatur auftretende Notationen denselben Begriff bezeichnen. Dies gilt umso mehr für den Fall binärer Bindungen, die wir aus diesem Grund als nächstes in zahlreichen Varianten charakterisieren. Fast alle der folgenden Aussagen erhält man sofort aus den bekannten Theoremen zu bindenden Galois-Abbildungen, was die Nützlichkeit der allgemeinen Theorie demonstriert.

Korollar 6.2.41. *Seien X, Y Hüllenräume und $R : X \rightharpoondown Y$ eine Relation. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *R ist eine Bindung.*

(2) $\overline{x^R} = x^R$ *und* $\overline{y_R} = y_R$ *für alle* $x \in X$, $y \in Y$.

(3) $\overline{\overline{A}^R} = A^R$ *für alle* $A \subseteq X$.

(4) $\overline{A^R} \subseteq \overline{A}^R$ *für alle* $A \subseteq X$.

(5) $\overline{A^R} = A^R$ *und* $\overline{A}^R = A^R$ *für alle* $A \subseteq X$.

(6) $\overline{\overline{B}_R} = B_R$ *für alle* $B \subseteq Y$.

(7) $\overline{B_R} \subseteq \overline{B}_R$ *für alle* $B \subseteq Y$.

(8) $\overline{B_R} = B_R$ *und* $\overline{B}_R = B_R$ *für alle* $B \subseteq Y$.

(9) $\overline{A^R} = A^R$ *und* $\overline{B_R} = B_R$ *für alle* $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(10) $\overline{A}^R = A^R$ *und* $\overline{B}_R = B_R$ *für alle* $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(11) $\overline{A} \subseteq {A^R}_R$ *und* $\overline{B} \subseteq {B_R}^R$ *für alle* $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(12) $\overline{{\overline{A}^R}_R} = {A^R}_R$ *und* $\overline{{\overline{B}_R}^R} = {B_R}^R$ *für alle* $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(13) ${\overline{A}^R}_R = {A^R}_R = \overline{{A^R}_R}$ *und* ${\overline{B}_R}^R = {B_R}^R = \overline{{B_R}^R}$ *für alle* $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(14) Für alle $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ *gilt: Aus* $A \times B \subseteq R$ *folgt* $\overline{A} \times B \subseteq R$ *und* $A \times \overline{B} \subseteq R$.

(15) Für alle $A \subseteq X$, $y \in Y$ *gilt* $A \times \{y\} \subseteq R \Rightarrow \overline{A} \times \{y\} \subseteq R$, *und für alle* $x \in X$, $B \subseteq Y$ *gilt* $\{x\} \times B \subseteq R \Rightarrow \{x\} \times \overline{B} \subseteq R$.

(16) Für alle $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ *gilt mit* $A \times B \subseteq R$ *auch* $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq R$.

(17) $\overrightarrow{R}^{\forall} \colon \mathfrak{C}X \to \mathfrak{C}Y$ *ist eine Galois-Abbildung, und für alle* $x \in X$ *gilt* $\overline{\overline{\{x\}}}^R = x^R$.

(18) Es gibt eine Galois-Abbildung $\Phi \colon \mathfrak{C}X \to \mathfrak{C}Y$ *mit* $\Phi(\overline{\{x\}}) = x^R$ *für alle* $x \in X$.

(19) Es gibt eine Galois-Verbindung (Φ, Ψ) *zwischen* $\mathfrak{C}X$ *und* $\mathfrak{C}Y$ *mit*

$$\Phi(\overline{\{x\}}) = x^R \quad \textit{für alle } x \in X, \qquad \Psi(\overline{\{y\}}) = y_R \quad \textit{für alle } y \in Y.$$

Darüber hinaus sind Φ *und* Ψ *eindeutig bestimmt durch* $\Phi = \overrightarrow{R}^{\forall}$ *und* $\Psi = \overrightarrow{(R^{\mathrm{d}})}^{\forall}$, *also*

$$\Phi(A) = A^R \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{C}X, \qquad \Psi(B) = B_R \quad \textit{für alle } B \in \mathcal{C}Y.$$

Beweis. Die Äquivalenzen ergeben sich aus Theorem 6.2.40 sowie Proposition 4.2.18, Theorem 4.3.12 sowie Theorem 5.2.42 und Proposition 5.2.46. □

Wie bereits für stetige und vollstetige Relationen gibt es auch für Bindungen einen Zusammenhang zwischen dem mehrstelligen und dem zweistelligen Fall:

Lemma 6.2.42. *Eine* $(n+1)$*-stellige Relation* $R \in \mathsf{Rel}(X_1, \dots, X_n; Y)$ *ist genau dann eine Bindung, wenn für alle* $i \in \underline{n}$ *und alle* $x \in \prod_{k=1}^n |X_k|$ *die binäre Relation* $R_i^x \in \mathsf{Rel}(X_i, Y)$ *eine Bindung ist.*

Beweis. Nach Proposition 5.3.5 ist die n-stellige Abbildung $R^{\forall}$ genau dann bindend, wenn für alle $i \in \underline{n}$ und alle $x \in \prod_{k=1}^n |X_k|$ die einstellige Abbildung

$$(R^{\forall})_i^{(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})}$$

bindend ist. Mit Proposition 3.3.26 folgt daraus die Behauptung. □

Bemerkung 6.2.43. Unter dem Namen *bi-abgeschlossene Relationen* werden binäre Bindungen R zwischen Hüllenräumen X und Y in [19] behandelt, wobei die in Aussage (2) des obigen Korollars 6.2.41 gegebene Definition verwendet wird (d. h. die Mengen xR und Ry sind für alle $x \in X$, $y \in Y$ abgeschlossen).

Beispiel 6.2.44. Seien L und M vollständige Verbände. Das Tensorprodukt $L \otimes M$ ist bekanntlich isomorph zum vollständigen Verband $\mathsf{res}_{(+;-)}(L;M)$ aller Galois-Abbildungen von L in M (siehe [2], [71], [85]). Nun ist jeder vollständige Verband N isomorph zum Hüllenverband $\mathfrak{CM}N = \mathfrak{N}N = (\{\downarrow_N x : x \in N\}, \subseteq)$ des Schnittraums $\mathfrak{M}N = (|N|, \Delta_N)$. Damit gilt

$$L \otimes M \cong \mathsf{res}_{(+;-)}(L;M) \cong \mathsf{res}_{(+;-)}(\mathfrak{CM}L; \mathfrak{CM}M).$$

Mit Theorem 6.2.37 folgt daraus

$$L \otimes M \cong \mathsf{Bond}(\mathfrak{M}L; \mathfrak{M}M),$$

d. h. das Tensorprodukt von L und M ist isomorph zum vollständigen Verband aller Bindungen zwischen den Schnitträumen von L und M.

Die Relationen aus $\mathsf{Bond}(\mathfrak{M}L; \mathfrak{M}M)$ (die *Tensoren*), mit denen sich das Tensorprodukt $L \otimes M$ darstellen lässt, wurden von Shmuely [85] als *G-Ideale* eingeführt. Korollar 6.2.41 liefert somit eine Fülle an Beschreibungen von G-Idealen. Beispielsweise ist eine Relation $R \subseteq L \times M$ genau dann eine Bindung zwischen $\mathfrak{M}L$ und $\mathfrak{M}M$, wenn für alle $A \subseteq L$, $B \subseteq M$ gilt:

$$A \times B \subseteq R \quad \Longrightarrow \quad \Delta_L A \times \Delta_M B \subseteq R. \tag{6.2}$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass R ein unterer Abschnitt von $L \times M$ ist und außerdem

$$A \times B \subseteq R \quad \Longrightarrow \quad (\textstyle\bigvee_L A, \bigvee_M B) \in R$$

für alle $A \subseteq L$, $B \subseteq M$ erfüllt. Erné [29] verallgemeinert mit Hilfe der Charakterisierung (6.2) das Tensorprodukt von vollständigen Verbänden auf beliebige geordnete Mengen; die verallgemeinerten G-Ideale sind dann also Bindungen zwischen Schnitträumen von geordneten Mengen.

Nach Bindungen zwischen Schnitträumen betrachten wir nun – analog zum Vorgehen bei stetigen Relationen – speziell die Bindungen zwischen Abschnittsräumen. Interessanterweise zeigt sich dabei, dass sich *Abschnittsrelationen* zwischen quasigeordneten Mengen (siehe Definition 3.2.1 und Lemma 3.2.2) als Bindungen und auch als vollstetige Relationen zwischen geeigneten Abschnittsräumen beschreiben lassen.

Theorem 6.2.45. *Sei $(P;Q) = (P_1, \ldots, P_n; Q)$ eine Familie quasigeordneter Mengen, und $R \in \mathsf{Rel}(P_1, \ldots, P_n; Q)$ eine Relation. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) R ist eine $(\sigma;\tau)$-Abschnittsrelation, d. h. $R \in \mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)}(P_1, \ldots, P_n; Q)$.

(2) R ist eine Bindung bezüglich $\uparrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ldots, \uparrow_{P_n}^{\sigma_n}, \downarrow_Q^{\tau}$, d. h. $R \in \mathsf{Bond}(\mathfrak{D}^n P^{-\sigma}; \mathfrak{D} Q^{\tau})$.

(3) R ist vollstetig bezüglich $\downarrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n}$ und $\downarrow_Q^{\tau}$, d. h. $R \in \mathsf{CCRel}(\mathfrak{D}^n P^{\sigma}; \mathfrak{D} Q^{\tau})$.

(4) $R^{\exists}$ ist bindend bzgl. $\downarrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n}$ und $\downarrow_Q^{\tau}$.

(5) $R^{\exists}_{([+];\tau)}$ ist bindend bzgl. $\downarrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n}$ und $\downarrow_Q$.

(6) Für alle $A_i \subseteq P_i$ $(i \in \underline{n})$ gilt

$$R^{\exists}(\downarrow_{P_1}^{\sigma_1} A_1, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n} A_n) = R^{\exists}(A_1, \ldots, A_n) = \downarrow_Q^{\tau} R^{\exists}(A_1, \ldots, A_n).$$

(7) $R^{\exists}(\downarrow_{P_1}^{\sigma_1} x_1, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n} x_n) = R(x_1, \ldots, x_n; \_) = \downarrow_Q^{\tau} R^{\exists}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})$ *für alle* $x \in \prod P$.

(8) Für alle $A_i \subseteq P_i$ $(i \in \underline{n})$ *gilt*

$$R^{\forall}(\uparrow_{P_1}^{\sigma_1} A_1, \ldots, \uparrow_{P_n}^{\sigma_n} A_n) = R^{\forall}(A_1, \ldots, A_n) = \downarrow_Q^{\tau} R^{\forall}(A_1, \ldots, A_n).$$

(9) $R^{\forall}(\uparrow_{P_1}^{\sigma_1} x_1, \ldots, \uparrow_{P_n}^{\sigma_n} x_n) = R(x_1, \ldots, x_n; \_) = \downarrow_Q^{\tau} R^{\forall}(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})$ *für alle* $x \in \prod P$.

(10) Für alle $A_i \subseteq P_i$ $(i \in \underline{n})$, $B \subseteq Q$ *gilt:*

$$A_1 \times \ldots \times A_n \times B \subseteq R \quad \Longrightarrow \quad \uparrow_{P_1}^{\sigma_1} A_1 \times \ldots \times \uparrow_{P_n}^{\sigma_n} A_n \times \downarrow_Q^{\tau} B \subseteq R.$$

(11) Mit $P_{n+1} := Q$ *und* $\alpha := (\sigma; -\tau)$ *gilt für alle* $x \in \prod_{k=1}^{n+1} P_k$ *und alle* $i \in \underline{n+1}$

$$R(x_1, \ldots, x_{i-1}, \_, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{A}P_i^{\alpha_i}.$$

Beweis. Zu (1) ⇔ (2): R ist genau dann eine $(\sigma; \tau)$-Abschnittsrelation zwischen $P_1, \ldots, P_n$ und Q, wenn R^{c} eine $(-\sigma; -\tau)$-Abschnittsrelation zwischen $P_1, \ldots, P_n$ und Q ist. Somit ist wegen der Äquivalenz von (1) und (4) die Aussage (1) gleichbedeutend damit, dass $(R^{\mathrm{c}})^{\exists}$ bindend bzgl. $\uparrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ldots, \uparrow_{P_n}^{\sigma_n}$ und $\uparrow_Q^{\tau}$ ist. Da $(R^{\mathrm{c}})^{\exists}(A_1, \ldots, A_n)$ genau dann ein unterer Abschnitt von $Q^{-\tau}$ ist, wenn $R^{\forall}(A_1, \ldots, A_n) = -((R^{\mathrm{c}})^{\exists}(A_1, \ldots, A_n))$ ein unterer Abschnitt von Q^{τ} ist, ergibt sich die äquivalente Aussage, dass $R^{\forall}$ bindend bzgl. $\uparrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ldots, \uparrow_{P_n}^{\sigma_n}$ und $\downarrow_Q^{\tau}$ ist. Insgesamt folgt damit die Behauptung.

(3) ⇔ (4) folgt aufgrund der Residuiertheit von Abschnittsräumen aus Lemma 5.3.25. (4) ⇔ (6) ist klar, und (6) ⇔ (7) ergibt sich wieder mit der Residuiertheit von Abschnittsoperatoren, da $R^{\exists}$ $([+]; +)$-residuiert ist. Zu (4) ⇔ (5): Ist $R^{\exists}$ außenbindend bezüglich $\downarrow_Q^{\tau}$, so gilt (Lemma 1.2.9)

$$\downarrow_Q \circ R^{\exists}_{([+];\tau)} = \downarrow_Q \circ \tau \circ R^{\exists} = \downarrow_Q \circ \tau \circ \downarrow_Q^{\tau} \circ R^{\exists} = \tau \circ \downarrow_Q^{\tau} \circ R^{\exists} = \tau \circ R^{\exists} = R^{\exists}_{([+];\tau)}.$$

Ist umgekehrt $R^{\exists}_{([+];\tau)}$ außenbindend bzgl. $\downarrow_Q$, so folgt

$$\begin{aligned} \downarrow_Q^{\tau} \circ R^{\exists} &= \downarrow_Q^{\tau} \circ \tau \circ \tau \circ R^{\exists} = \downarrow_Q^{\tau} \circ \tau \circ R^{\exists}_{([+];\tau)} = \downarrow_Q^{\tau} \circ \tau \circ \downarrow_Q \circ R^{\exists}_{([+];\tau)} \\ &= \tau \circ \downarrow_Q \circ R^{\exists}_{([+];\tau)} = \tau \circ R^{\exists}_{([+];\tau)} = R^{\exists}. \end{aligned}$$

Zu (4) ⇔ (1): Aufgrund der Residuiertheit ist $R^{\exists}$ genau dann bindend bezüglich $\downarrow_{P_1}^{\sigma_1}, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n}$ und $\downarrow_Q^{\tau}$, wenn $\downarrow_Q^{\tau} R^{\exists}(\downarrow_{P_1}^{\sigma_1} x_1, \ldots, \downarrow_{P_n}^{\sigma_n} x_n) = R(x_1, \ldots, x_n; \_)$ für alle $x \in \prod P$ gilt. Dies ist nach Lemma 6.2.12 gleichbedeutend mit $\downarrow_{(P;Q)}^{(-\sigma;\tau)} R = R$, also mit Aussage (1).

(2) ⇔ (8) ist klar (Proposition 4.2.18). Die Äquivalenz der Aussagen (2), (10) und (11) gilt nach Theorem 6.2.40. (8) ⇔ (9) folgt schließlich wegen der Residuiertheit der Abschnittsoperatoren und Proposition 5.3.5. □

Wir können also festhalten:

$$\begin{aligned} \mathsf{ARel}_{(\sigma;\tau)}(P_1, \ldots, P_n; Q) &= \mathsf{Bond}(\mathfrak{D}P_1^{-\sigma_1}, \ldots, \mathfrak{D}P_n^{-\sigma_n}; \mathfrak{D}Q^{\tau}) \\ &= \mathsf{CCRel}(\mathfrak{D}P_1^{\sigma_1}, \ldots, \mathfrak{D}P_n^{\sigma_n}; \mathfrak{D}Q^{\tau}). \end{aligned}$$

Nach Aussage (11) des obigen Theorems können Abschnittsrelationen auch dadurch beschrieben werden, dass sie in den ersten n Variablen jeweils ein unterer und in der letzten Variablen ein oberer Abschnitt sind. Außerdem impliziert Aussage (4), dass jede Abschnittsrelation zwischen $P_1, \ldots, P_n$ und Q insbesondere abgeschlossen ist bezüglich $\downarrow_{P_1}, \ldots, \downarrow_{P_n}$ und $\downarrow_Q$.

Für die vollstetige Hülle von stetigen Relationen zwischen Abschnittsräumen folgt:

Korollar 6.2.46. *Sei* $(P; Q)$ *eine Familie quasigeordneter Mengen. Für jede stetige Relation* $R \in \mathsf{CRel}(\mathfrak{D}^n P^\sigma; \mathfrak{D} Q^\tau)$ *ist die vollstetige Hülle gegeben durch*

$$R^\Gamma = \downarrow^{(-\sigma;\tau)}_{(P;Q)} R.$$

Beweis. R^Γ ist die kleinste vollstetige Relation, die die stetige Relation R umfasst, nach Theorem 6.2.45 also die kleinste $(\sigma; \tau)$-Abschnittsrelation zwischen P und Q, die R umfasst. Dies ist gerade der von R erzeugte $(-\sigma; \tau)$-Abschnitt in $\prod P \times Q$. □

Da Abschnittsrelationen genau die vollstetigen Relationen zwischen Abschnittsräumen sind, ergibt sich aus den früheren Resultaten zu vollstetigen Relationen, dass Abschnittsrelationen genau die residuierten Abbildungen zwischen Abschnittsverbänden induzieren (vergleiche auch Bemerkung 3.2.6 und Theorem 7.3.17).

Korollar 6.2.47. *Sei* $(P; Q)$ *eine Familie quasigeordneter Mengen. Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{ARel}(P; Q)$ *aller Abschnittsrelationen zwischen* $P_1, \dots, P_n$ *und* Q *und*
- $\mathsf{res}(\mathfrak{A}^n P; \mathfrak{A} Q)$ *aller residuierten Abbildungen von* $\mathfrak{A} P_1, \dots, \mathfrak{A} P_n$ *in* $\mathfrak{A} Q$

sind isomorph vermöge der Abbildung

$$R \mapsto \overrightarrow{R^\exists} = \downarrow^\bullet_Q \circ R^\exists \circ \downarrow^\circ_P$$

mit $\overrightarrow{R^\exists}(\downarrow_{P_1} A_1, \dots, \downarrow_{P_n} A_n) = R^\exists(A_1, \dots, A_n)$ *für alle* $A_i \subseteq P_i$ $(i \in \underline{n})$*.*

Beweis. Nach Theorem 6.2.8 gilt mit dem angegebenen Isomorphismus

$$\mathsf{ARel}(P; Q) = \mathsf{CCRel}(\mathfrak{D}^n P; \mathfrak{D} Q) \cong \mathsf{res}(\mathfrak{C}^n \mathfrak{D}^n P; \mathfrak{C}\mathfrak{D} Q) = \mathsf{res}(\mathfrak{A}^n P; \mathfrak{A} Q),$$

und für jede Abschnittsrelation R ist $R^\exists$ bindend. □

6.3 Relationen zwischen formalen Kontexten

Häufig entstehen Hüllenräume durch eine Polarität: Ist I eine binäre Relation zwischen Mengen G und M, so ist $(I^\forall, (I^\mathrm{d})^\forall)$ eine Galois-Verbindung zwischen $\mathfrak{P} G$ und $\mathfrak{P} M$ (vergleiche Beispiel 3.3.24), und folglich sind $(G, (I^\mathrm{d})^\forall \circ I^\forall)$ und $(M, I^\forall \circ (I^\mathrm{d})^\forall)$ Hüllenräume.

Die zugrundeliegenden Tripel (G, M, I), bestehend aus Mengen G und M sowie einer Relation $I \subseteq G \times M$, sind so universell, dass verschiedene bekannte Theorien auf ihnen aufbauen, darunter die *Formale Begriffsanalyse* (siehe [44]), die Theorie des *Information Flow* ([3]) und die Theorie der *Chu Spaces* ([78]).

Im folgenden verwenden wir die Terminologie der Formalen Begriffsanalyse, in der die erwähnten Tripel $\mathbb{K} = (G, M, I)$ *formale Kontexte* (oder einfach *Kontexte*) genannt werden. Die Elemente von G heißen *Gegenstände*, die von M *Merkmale* des Kontextes $\mathbb{K}$, und für die sogenannte *Inzidenzrelation* I wird $g\ I\ m$ gelesen als „g hat das Merkmal m“.

Wir führen eine praktische Schreibweise für die beiden durch einen Kontext induzierten Hüllenräume ein:

Notation 6.3.1 (Induzierte Hüllenräume)**.** Für einen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ seien die induzierten Hüllenräume $\mathbb{K}_+$ und $\mathbb{K}_-$ definiert durch

$$\mathbb{K}_+ := (G, (I^{\mathrm{d}})^{\forall} \circ I^{\forall}), \qquad \mathbb{K}_- := (M, I^{\forall} \circ (I^{\mathrm{d}})^{\forall}).$$

Damit ist $\Gamma_{\mathbb{K}_+}(A) = A^{I}{}_{I}$ für alle $A \subseteq G$ und $\Gamma_{\mathbb{K}_-}(B) = B_{I}{}^{I}$ für alle $B \subseteq M$.

Ein (*formaler*) *Begriff* eines Kontextes $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ist ein Paar (A, B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ sowie $A^I = B$ und $B_I = A$. Die Menge aller Begriffe von $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}\mathbb{K}$, und der *Begriffsverband* von $\mathbb{K}$ sei die durch $(A, B) \leq (C, D) :\Leftrightarrow A \subseteq C \Leftrightarrow D \subseteq B$ geordnete Menge $\mathfrak{B}\mathbb{K} := (\mathcal{B}\mathbb{K}, \leq)$. Für $(A, B) \in \mathfrak{B}\mathbb{K}$ heißt A der *Umfang* und B der *Inhalt* des Begriffs (A, B).

Die Hüllensysteme $\mathcal{C}\mathbb{K}_+$ bzw. $\mathcal{C}\mathbb{K}_-$ der „Galois-abgeschlossenen“ Mengen bestehen genau aus den Begriffsumfängen bzw. den Begriffsinhalten des Kontextes $\mathbb{K}$. Offensichtlich ist der vollständige Hüllenverband $\mathfrak{C}\mathbb{K}_+$ (der *Umfangsverband*) isomorph zum Begriffsverband $\mathfrak{B}\mathbb{K}$, und $\mathfrak{C}\mathbb{K}_-$ (der *Inhaltsverband*) ist dual isomorph zu $\mathfrak{B}\mathbb{K}$.

Grundlegend in der Formalen Begriffsanalyse ist das Zusammenspiel zwischen Kontexten und vollständigen Verbänden in der Form von Begriffsverbänden. Deshalb lohnt es sich, die bisher entwickelte Korrespondenz von allgemeinen residuierten Abbildungen zwischen Hüllenverbänden mit geeigneten Relationen zwischen Hüllenräumen speziell für Begriffsverbände und Kontexte zu betrachten. Auf diese Weise lassen sich zahlreiche in der Literatur vorkommende Typen von Relationen zwischen Kontexten in die allgemeine Theorie einordnen. Für zweistellige Relationen wird sich insbesondere herausstellen, dass sich die Grundbegriffe stetig, vollstetig und Bindung sehr übersichtlich mit Hilfe der Residuale der Relationen-Komposition beschreiben lassen.

6.3.1 Stetige und vollstetige Relationen

Die bisherigen Resultate zu stetigen und vollstetigen Relationen zwischen Hüllenräumen (siehe insbesondere Proposition 6.2.10 und Theorem 6.2.25) können mühelos auf Relationen zwischen Kontexten übertragen werden, indem für jeden beteiligten Kontext $\mathbb{K}$ einer der beiden induzierten Hüllenräume $\mathbb{K}_+$ oder $\mathbb{K}_-$ zugrundegelegt wird. Wir beschränken uns im folgenden auf binäre Relationen zwischen den Gegenstandsmengen von Kontexten.

Für das nächste Theorem sei zum einen an das Quantaloid Rel der Mengen und Relationen erinnert (siehe Beispiel 2.3.26): Die Residuale $\leftarrow$ und $\rightarrow$ der Komposition $\circ$ in Rel sind gegeben durch

$$T \leftarrow R = \{\, (y, z) : \forall x (x \; R \; y \Rightarrow x \; T \; z) \,\}, \qquad S \rightarrow T = \{\, (x, y) : \forall z (y \; S \; z \Rightarrow x \; T \; z) \,\}.$$

Zum anderen verwenden wir für Relationen $I \subseteq G \times M$ und $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ auch die folgenden abkürzenden Schreibweisen, sofern keine Missverständnisse zu befürchten sind:

$$\begin{aligned} A \; I \; m \quad &\text{für} \quad (\forall g \in A)(g \; I \; m), \\ g \; I \; B \quad &\text{für} \quad (\forall m \in B)(g \; I \; m). \end{aligned}$$

Damit gilt $m \in A^I \Leftrightarrow A \; I \; m \Leftrightarrow A \subseteq m_I$ und $g \in B_I \Leftrightarrow g \; I \; B \Leftrightarrow B \subseteq g^I$ sowie $\{g\} \; I \; m \Leftrightarrow g \; I \; m \Leftrightarrow g \; I \; \{m\}$.

Die Stetigkeit einer binären Relation zwischen Kontexten lässt sich nun auf zum Teil verblüffende Weise beschreiben, unter anderem (für die duale Relation) allein mit Hilfe von Inzidenzrelationen und der erwähnten Residuale.

Theorem 6.3.2. *Seien $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{L} = (H, N, J)$ Kontexte und $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoonup \mathbb{L}_+$ eine Relation. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) R ist stetig.

(2) Für jedes $n \in N$ ist $\{ g \in G : (\forall h \in H)(g \; R \; h \Rightarrow h \; J \; n) \} \in \mathcal{C}\mathbb{K}_+$.

(3) Es gibt eine Relation $S : \mathbb{L}_- \rightharpoonup \mathbb{K}_-$, so dass für alle $g \in G$ und alle $n \in N$ gilt:

$$g \; I \; (nS) \quad \Longleftrightarrow \quad (gR) \; J \; n.$$

(4) Es gibt eine Relation $S : \mathbb{L}_- \rightharpoonup \mathbb{K}_-$ mit $S \to I = J \leftarrow R^{\mathrm{d}}$.

(5) $(I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I = J \leftarrow R^{\mathrm{d}}$.

(6) $R^{\mathrm{d}} \subseteq ((I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I) \to J$.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Die Menge $\{ n_J : n \in N \}$ aller Merkmalsbegriffe von $\mathbb{L}$ ist eine $\bigwedge$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{C}\mathbb{L}$, und die Behauptung folgt somit aus Korollar 6.2.16. Zu (2) $\Leftrightarrow$ (3): Die Relation $S : \mathbb{L}_- \rightharpoonup \mathbb{K}_-$ sei definiert durch $S = I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})$, d. h.

$$n \; S \; m \quad \Longleftrightarrow \quad \{ g' \in G : (g'R) \; J \; n \} \; I \; m \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall g' \in G)((g'R) \; J \; n \Rightarrow g' \; I \; m).$$

Es gilt

$$g \; I \; (nS) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall m \in M)(n \; S \; m \Rightarrow g \; I \; m).$$

Aussage (3) besagt somit gerade, dass die Menge $\{ g \in G : (gR) \; J \; n \}$ für jedes $n \in N$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ ist. Wegen

$$(gR) \; J \; n \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall h \in H)(g \; R \; h \Rightarrow h \; J \; n)$$

ist dies gleichbedeutend mit (2). Die Äquivalenz (3) $\Leftrightarrow$ (4) prüft man mit den oben angegebenen Bestimmungen der Residuale $\leftarrow$ und $\to$ leicht nach. Offensichtlich gilt auch (5) $\Rightarrow$ (4), und mit $S = I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})$ ergibt sich aus den bereits gezeigten Implikationen zudem (2) $\Rightarrow$ (5). Zu (5) $\Leftrightarrow$ (6): Aus den Rechenregeln für Quantaloide in Proposition 2.3.28 folgt

$$\begin{aligned} (I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I = J \leftarrow R^{\mathrm{d}} \quad &\Longleftrightarrow \quad (I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I \subseteq J \leftarrow R^{\mathrm{d}} \\ &\Longleftrightarrow \quad R^{\mathrm{d}} \subseteq ((I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I) \to J. \end{aligned}$$

□

Die Stetigkeit einer Relation R zwischen $(G, M, I)_+$ und $(H, N, J)_+$ lässt sich also insbesondere durch

$$R^{\mathrm{d}} \subseteq ((I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I) \to J$$

charakterisieren. Gilt hierbei auch die umgekehrte Inklusion, so gelangt man erstaunlicherweise genau zur Vollstetigkeit:

Theorem 6.3.3. *Seien $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{L} = (H, N, J)$ Kontexte und $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoonup \mathbb{L}_+$ eine Relation. Es sind äquivalent:*

(1) R ist vollstetig.

(2) R ist stetig, und für jedes $g \in G$ ist $gR \in \mathcal{C}\mathbb{L}_+$.

(3) R ist stetig, und es gilt $R^{\mathrm{d}} = (J \leftarrow R^{\mathrm{d}}) \to J$.

(4) $R^{\mathrm{d}} = ((I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I) \to J$.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) gilt nach Theorem 6.2.25. Zu (2) $\Leftrightarrow$ (3): $(\forall g \in G)(gR = (gR)^{J}{}_{J})$ ist äquivalent zu $R^{\mathrm{d}} = (J \leftarrow R^{\mathrm{d}}) \to J$. Zu (3) $\Rightarrow$ (4): Nach Voraussetzung und Theorem 6.3.2 gilt $\big(I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})\big) \to I = J \leftarrow R^{\mathrm{d}}$ und somit

$$R^{\mathrm{d}} = (J \leftarrow R^{\mathrm{d}}) \to J = \big((I \leftarrow (J \leftarrow R^{\mathrm{d}})) \to I\big) \to J.$$

(4) $\Rightarrow$ (3) folgt mit Theorem 6.3.2 und den Rechenregeln für Quantaloide aus Proposition 2.3.28. $\square$

Wie im obigen Beweis ersichtlich ist, erhält man die vollstetige Hülle einer stetigen Relation $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoonup \mathbb{L}_+$ zwischen Kontexten $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{L} = (H, N, J)$ durch

$$R^{\Gamma} = J^{\mathrm{d}} \leftarrow (R \to J^{\mathrm{d}}) = \big((J \leftarrow R^{\mathrm{d}}) \to J\big)^{\mathrm{d}}.$$

An den vorigen beiden Theoremen lässt sich außerdem erkennen, dass sowohl die Stetigkeit als auch die Vollstetigkeit für Relationen zwischen Kontexten in der Prädikatenlogik *erster Stufe* formuliert werden können. Im Falle beliebiger Hüllenräume beinhalten die früher gegebenen Beschreibungen der (Voll-)Stetigkeit hingegen Potenzmengen, also Quantifizierungen über Teilmengen.

Es ist naheliegend, ein Paar (R, S) von Relationen $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoonup \mathbb{L}_+$ und $S : \mathbb{L}_- \rightharpoonup \mathbb{K}_-$, welches die Bedingung

$$g\ I\ (nS) \quad \Longleftrightarrow \quad (gR)\ J\ n \qquad \text{für alle } g \in G,\ n \in N \tag{6.3}$$

aus Theorem 6.3.2 erfüllt, eine *relationale Adjunktion* zwischen den Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ zu nennen (siehe Abbildung 6.1).

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbb{K}} & G \arrow[r, "R"] \arrow[d, "I"'] & H \arrow[d, "J"] & \boxed{\mathbb{L}} \\
& M & N \arrow[l, "S"] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 6.1: Relationale Adjunktion (R, S) zwischen Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$

Sind R, S Funktionen und die Kontexte von der Form $\mathbb{K} = (|P|, |P|, \leq_P)$ und $\mathbb{L} = (|Q|, |Q|, \leq_Q)$ für geordnete Mengen P und Q, so lautet die Bedingung (6.3) für $(f, g) := (R, S)$

$$x \leq_P g(y) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq_Q y \qquad \text{für alle } x \in |P|,\ y \in |Q|.$$

Der Begriff der relationalen Adjunktion ist demnach eine Verallgemeinerung der ordnungstheoretischen Adjunktion.

Wir nennen eine relationale Adjunktion (R, S) zwischen Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ *maximal*, wenn bezüglich der Mengeninklusion gilt:

$$R = \max\{\, R' \in \mathsf{Rel}(\mathbb{K}_+; \mathbb{L}_+) : (R', S) \text{ relationale Adjunktion} \,\},$$
$$S = \max\{\, S' \in \mathsf{Rel}(\mathbb{L}_-; \mathbb{K}_-) : (R, S') \text{ relationale Adjunktion} \,\}.$$

Eine Relation $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_+$ heiße *relational residuiert*, wenn es ein $S : \mathbb{L}_- \rightharpoondown \mathbb{K}_-$ gibt, so dass (R, S) eine relationale Adjunktion ist. Unter einer *maximal* relational residuierten Relation $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_+$ verstehen wir eine solche, für die ein $S : \mathbb{L}_- \rightharpoondown \mathbb{K}_-$ existiert mit

$$R = \max\{ R' \in \mathsf{Rel}(\mathbb{K}_+; \mathbb{L}_+) : (R', S) \text{ relationale Adjunktion} \},$$

also der ersten der beiden obigen Maximalitätsbedingungen.

Nach Theorem 6.3.2 sind die *relational residuierten* Relationen genau die *stetigen*. Es lässt sich leicht zeigen, dass die *maximal relational residuierten* genau die *vollstetigen* Relationen zwischen Kontexten sind. Die Vollstetigkeit einer Relation R zwischen Kontexten ist außerdem dazu äquivalent, dass R die erste Komponente einer *maximalen* relationalen Adjunktion (R, S) ist. Zu relationalen Adjunktionen und ihrer möglichen Verallgemeinerung zu relationalen $(\sigma; \tau)$-residuierten Familien zwischen Kontexten ließen sich noch viele weitere interessante Resultate erwähnen, auf deren Darstellung wir jedoch aus Platzgründen verzichten. Wir stellen aber noch ihren Bezug zu einigen in der Literatur auftretenden Notationen her:

Bemerkung 6.3.4. Von relationalen Adjunktionen gelangt man durch den Übergang zur dualen Inzidenzrelation auf der rechten Seite in (6.3) zu sogenannten *relationalen Galois-Verbindungen*. Einen sehr guten Überblick zu relationalen Galois-Verbindungen zwischen Kontexten – allerdings im Sinne *maximaler* – gibt Ganter [43]. Dort wird bereits erwähnt, dass maximale relationale Galois-Verbindungen dasselbe sind wie die *Kontext-Galois-Verbindungen* von Xia [90], und auch, dass maximale relationale Adjunktionen gerade den *Chu-Korrespondenzen* bei Mori entsprechen (siehe [69, 70]). Ganter untersucht außerdem die von Xia eingeführten *G-Relationen*. Eine G-Relation ist die erste Komponente einer maximalen relationalen Galois-Verbindung; bis auf Dualisierung des rechten Kontextes sind G-Relationen somit genau die vollstetigen Relationen zwischen Kontexten. Auch die Beschreibung von G-Relationen durch die Bedingungen (2) aus Theorem 6.3.2 und (2) aus Theorem 6.3.3 findet sich schon bei Ganter.

Als *relationale Infomorphismen* treten relationale Adjunktionen (R, S) bei Kent [59] auf. Kent benutzt der Sache nach die in Aussage (4) des Theorems 6.3.2 vorkommende Bedingung

$$S \rightarrow I = J \leftarrow R^{\mathrm{d}},$$

beschreibt jedoch die Stetigkeit der *dualen* Relation $R^{\mathrm{d}} : \mathbb{L}_+ \rightharpoondown \mathbb{K}_+$ mit Paaren (S', R) von Relationen $S' : \mathbb{K}_- \rightharpoondown \mathbb{L}_-$ und $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_+$ in derselben Richtung. Auf diese Weise lässt sich in den obigen Charakterisierungen der Stetigkeit mit Hilfe der Residuale $\leftarrow$ und $\rightarrow$ die Dualisierung von Relationen vermeiden.

Die hier erwähnte Literatur zu relationalen Adjunktionen und verwandten Begriffen ist sicher nicht erschöpfend, da stetige bzw. vollstetige Relationen zwischen Kontexten (im Unterschied zu solchen zwischen beliebigen Hüllenräumen) wiederholt in verschiedenen Zusammenhängen unter anderen Namen erneut erfunden wurden (ein aktuelles Beispiel ist [48]).

Die Erkenntnis, dass es sich bei den angeführten Begriffen um *Stetigkeitsbegriffe* für Relationen handelt, ist unseres Wissens allerdings neu und ermöglicht für geeignete Formulierungen der Stetigkeit die Verallgemeinerung von Kontexten auf beliebige Hüllenräume.

6.3.2 Korrespondenz von Bindungen und vollstetigen Relationen

Auch Bindungen lassen sich problemlos von Hüllenräumen auf Kontexte übertragen, indem für die auftretenden Kontexte $\mathbb{K} = (G, M, I)$ einer der beiden Hüllenräume $\mathbb{K}_+$ oder $\mathbb{K}_-$

herangezogen wird. Schreibt man für die Hüllenoperatoren $\Gamma_{\mathbb{K}_+}$ bzw. $\Gamma_{\mathbb{K}_-}$ die Hüllen $\overline{A} = \Gamma_{\mathbb{K}_+}(A)$ als $A^I{}_I$ bzw. die Hüllen $\overline{B} = \Gamma_{\mathbb{K}_-}(B)$ als $B_I{}^I$ (und entsprechend für die übrigen beteiligten Kontexte), so erhält man aus Theorem 6.2.40 und Korollar 6.2.41 zahlreiche Charakterisierungen speziell für Bindungen zwischen Kontexten. Damit sieht man unter anderem:

Bemerkung 6.3.5. Für Kontexte $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{L} = (H, N, J)$ sind Bindungen $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoonup \mathbb{L}_-$ in unserem Sinne dasselbe wie die *Bindungen von* $\mathbb{K}$ *zu* $\mathbb{L}$ der Formalen Begriffsanalyse (siehe [44]), was sich direkt an der Bedingung (2) aus Korollar 6.2.41 ablesen lässt:

$$g^R{}_J{}^J = g^R, \qquad n_R{}^I{}_I = n_R \qquad (g \in G,\, n \in N),$$

d. h. g^R ist stets ein Begriffsinhalt von $\mathbb{L}$ und n_R ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$. Bindungen zwischen $\mathbb{K}_+$ und $\mathbb{L}_+$ sind als *duale Bindungen* aus der Formalen Begriffsanalyse bekannt. Die Korrespondenz von Bindungen (bzw. dualen Bindungen) zwischen Kontexten und residuierten Abbildungen (bzw. Galois-Abbildungen) zwischen den zugehörigen Begriffsverbänden finden sich bereits in [44], siehe auch [43].

Unter dem Namen *kompatible Relationen* treten $(n + 1)$-stellige Bindungen zwischen Kontexten bei Gehrke [45] auf, wobei zur Definition die Bedingung (2) aus Theorem 6.2.40 benutzt wird.

Ebenso wie stetige und vollstetige Relationen lassen sich offensichtlich auch Bindungen zwischen Kontexten im Rahmen der Prädikatenlogik *erster Stufe* beschreiben.

Für binäre Bindungen zwischen Kontexten erwähnen wir noch die elementfreie Beschreibung mit Hilfe von Residualen.

Lemma 6.3.6. *Seien* $\mathbb{K} = (G, M, I)$ *und* $\mathbb{L} = (H, N, J)$ *Kontexte.* $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoonup \mathbb{L}_-$ *ist genau dann eine Bindung, wenn gilt:*

$$(I \leftarrow R) \rightarrow I = R = J \leftarrow (R \rightarrow J).$$

Abschließend skizzieren wir einen Zusammenhang von Bindungen und vollstetigen Relationen zwischen Kontexten, der für binäre Relationen schon bekannt ist.

Definition 6.3.7 (Induzierte Relationen zwischen Kontexten)**.** Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i \in \underline{n})$ und $\mathbb{L} = (H, N, J)$ Kontexte. Für eine Relation $R \in \mathsf{Rel}(G_1, \dots, G_n; H)$ sei $R^\partial \in \mathsf{Rel}(G_1, \dots, G_n; N)$ definiert durch

$$(g_1, \dots, g_n; n) \in R^\partial \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall h \in H)\big(R(g_1, \dots, g_n; h)\big) \Rightarrow h\ J\ n\big),$$

und für $S \in \mathsf{Rel}(G_1, \dots, G_n; N)$ sei umgekehrt $S_\partial \in \mathsf{Rel}(G_1, \dots, G_n; H)$ festgelegt durch

$$(g_1, \dots, g_n; h) \in S_\partial \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall n \in N)\big(S(g_1, \dots, g_n; n) \Rightarrow h\ J\ n\big).$$

Damit ist für alle $g_i \in G_i$ $(i \in \underline{n})$

$$R^\partial(g_1, \dots, g_n; \_) = \big(R(g_1, \dots, g_n; \_)\big)^J,$$
$$S_\partial(g_1, \dots, g_n; \_) = \big(S(g_1, \dots, g_n; \_)\big)_J.$$

Ohne Schwierigkeiten lässt sich zeigen:

Proposition 6.3.8. *Seien* $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i \in \underline{n})$ *und* $\mathbb{L} = (H, N, J)$ *Kontexte. Die vollständigen Verbände*

- $\mathsf{CCRel}((\mathbb{K}_1)_+, \ldots, (\mathbb{K}_n)_+; \mathbb{L}_+)$ *aller vollstetigen Relationen und*
- $\mathsf{Bond}((\mathbb{K}_1)_+, \ldots, (\mathbb{K}_n)_+; \mathbb{L}_-)$ *aller Bindungen*

zwischen den Kontexten $\mathbb{K}_1$, ..., $\mathbb{K}_n$ *und* $\mathbb{L}$ *sind dual isomorph vermöge der zueinander inversen Abbildungen* $R \mapsto R^\partial$ *und* $S \mapsto S_\partial$. □

Sind $\mathbb{K} = (G, M, I)$, $\mathbb{L} = (H, N, J)$ Kontexte und $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_+$, $S : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_-$ binäre Relationen, so ist

$$R^\partial = J \leftarrow R^{\mathrm{d}} \quad \text{und} \quad S_\partial = (S \to J)^{\mathrm{d}}.$$

Ein Blick auf Theorem 6.3.2 verrät, dass R genau dann stetig ist, wenn R^∂ eine Bindung ist. Die vollstetige Hülle von R ist in diesem Fall gegeben durch $R^\Gamma = {R^\partial}_\partial$.

7 Hüllenraum-Kategorien

Für jeden Hüllenraum X ist der Verband $\mathfrak{C}X$ der abgeschlossenen Teilmengen ein vollständiger Verband. Außerdem ist jeder vollständige Verband L isomorph zu einem Hüllenverband, nämlich dem Verband $\mathfrak{N}L = \mathfrak{C}\mathfrak{M}L$ der Hauptideale. Das führt zu der Frage, ob sich durch geeignete Wahl von Morphismen zwischen Hüllenräumen eine Hüllenraum-Kategorie konstruieren lässt, die äquivalent zur Kategorie SL der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen ist – oder sogar äquivalent zur Kategorie CL der vollständigen Verbände und vollständigen Homomorphismen. Diese Frage kann mit vollstetigen Relationen als Morphismen zusammen mit einer geeigneten Komposition positiv beantwortet werden.

Wir führen dafür als erstes das Quantaloid der Hüllenräume und stetigen Relationen ein und konstruieren aus diesem das Quantaloid der vollstetigen Relationen. Im Anschluss wird dann ausführlich die adjungierte Quantaloid-Äquivalenz zwischen dem Quantaloid der vollstetigen Relationen und dem Quantaloid SL dargestellt. Aus Kapitel 5 ist bereits bekannt, dass der Hüllenbereichsfunktor zwischen ACS und SL eine Äquivalenz ist. Auch dieser lässt sich zu einer adjungierten Äquivalenz ausbauen. Darüber hinaus untersuchen wir Äquivalenzen zwischen dem Quantaloid ACS und dem Quantaloid der vollstetigen Relationen, so dass sich insgesamt alle wichtigen Passagen zwischen superalgebraischen Hüllenstrukturen, klassischen Hüllenstrukturen, Hüllenräumen und vollständigen Verbänden (zusammen mit den jeweiligen Morphismen) ergeben.

Die genannten Äquivalenzen liefern durch Spezialisierung auf gewisse Unterkategorien eine Vielzahl weiterer Resultate, von denen wir nur einige wenige darstellen. Wir beschränken uns dabei auf Hüllenraum-Kategorien und betrachten für diese speziell sowohl adjungierte bzw. funktionale vollstetige Relationen als auch differenzierte, reduzierte bzw. residuale Hüllenräume. Hier können insbesondere die früheren Resultate zu Abschnittsrelationen und weitere bekannte Notationen in einer umfassenden Theorie zusammengeführt werden. Abschließend skizzieren wir noch einige Folgerungen, die sich aus den Hüllenraum-Kategorien für Kategorien von formalen Kontexten ergeben.

7.1 Hüllenraum-Quantaloide

7.1.1 Das Quantaloid der stetigen Relationen

Die gewöhnliche Komposition von stetigen Relationen liefert wieder solche:

Lemma 7.1.1. *Seien X, Y, Z Hüllenräume. Sind $R : X \rightharpoondown Y$, $S : Y \rightharpoondown Z$ stetige Relationen, so ist auch $S \circ R : X \rightharpoondown Z$ stetig. Außerdem ist die Identität $\mathrm{id}_X : X \rightharpoondown X$ stetig.*

Beweis. Da $R \mapsto R^{\exists}$ funktoriell ist (siehe Korollar 3.3.15 und auch Theorem 3.3.7), folgen die Behauptungen aus den allgemeineren Feststellungen Proposition 4.2.23 und Lemma 4.2.19 zu stetigen Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen. □

Das führt auf die folgende Kategorie.

Definition 7.1.2 (Kategorie der stetigen Relationen)**.** Es bezeichne CRel die Kategorie der Hüllenräume und stetigen Relationen (mit der üblichen Komposition von Relationen und den üblichen Identitäten).

Bezüglich der Mengeninklusion auf den Morphismenmengen ist CRel offensichtlich eine lokal geordnete 2-Kategorie (vergleiche Rel aus Beispiel 2.3.16). Die Mengen $\mathsf{CRel}(X, Y)$ werden im folgenden also auch als geordnete Mengen aufgefasst und stimmen so mit der früheren Definitionen von $\mathsf{CRel}(X; Y)$ überein.

Die Kategorie der Hüllenräume und stetigen Relationen ist sogar ein Quantaloid:

Lemma 7.1.3. *Die lokal geordnete* 2*-Kategorie* CRel *ist ein Quantaloid, in dem das Supremum stetiger Relationen durch die Vereinigung gegeben ist:*

$$\bigvee\nolimits_{\mathsf{CRel}(X,Y)} \mathcal{R} = \bigcup \mathcal{R} \quad \textit{für alle } \mathcal{R} \subseteq \mathsf{CRel}(X, Y).$$

Beweis. Nach Lemma 7.1.1 und Lemma 6.2.7 überträgt sich die Quantaloid-Struktur von Rel auf CRel. □

Das Quantaloid der Hüllenräume und stetigen Relationen ist offensichtlich isomorph zum Quantaloid der *klassischen* Hüllenstrukturen und stetigen, residuierten Funktionen. Der zugehörige Isomorphismus wird wie folgt bezeichnet:

Definition 7.1.4 (Hüllenstrukturfunktor)**.** Es sei $\bar{\mathfrak{P}}\colon \mathsf{CRel} \to \mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{P}}$ der Funktor, der jedem Hüllenraum X die klassische Hüllenstruktur $\bar{\mathfrak{P}}X = (\mathfrak{P}X, \Gamma_X) = (\mathcal{P}X, \subseteq, \Gamma_X)$ und jeder stetigen Relation R die stetige residuierte Abbildung $\bar{\mathfrak{P}}R = R^{\exists}$ zuordnet.

Theorem 7.1.5. *Die Quantaloide* CRel *und* $\mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{P}}$ *sind isomorph, und* $\bar{\mathfrak{P}}\colon \mathsf{CRel} \to \mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{P}}$ *ist ein Quantaloid-Isomorphismus.*

Der inverse Quantaloid-Homomorphismus $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}\colon \mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{CRel}$ *ordnet jeder klassischen Hüllenstruktur* C *den Hüllenraum* $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}(C) = (\mathfrak{P}^{-1}|C|, \gamma_C)$ *und jeder stetigen, residuierten Abbildung* f *zwischen klassischen Hüllenstrukturen die stetige Relation* $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}f = \mathfrak{P}^{-1}f = f_{\exists}$ *zu.*

Beweis. Nach Theorem 3.3.7 und Korollar 3.3.15. □

Bemerkung 7.1.6. Analog zu CRel ließe sich auch ein Quantaloid der Hüllenräume und $(-;-)$*-abgeschlossenen Relationen* sowie der Mengeninklusion festlegen, welches vermöge der Identität auf den Objekten und $R \mapsto R^{\mathrm{d}}$ zu CRel dual isomorph ist. Man vergleiche hierzu Bemerkung 5.2.29 und beachte für den Zusammenhang mit $(\mathsf{ACS}^{cld})^{\mathrm{co\,op}}$, dass $R \mapsto R^{\exists}_{(-;-)}$ nach Theorem 3.3.7 ein dualer Isomorphismus ist. Auf $(-;-)$-abgeschlossene Relationen werden wir im folgenden aber nicht weiter eingehen.

Aus topologischer Sicht sind die kanonischen Morphismen zwischen Hüllenräumen gerade die stetigen *Funktionen.* Für die entsprechende Unterkategorie von CRel führen wir die folgende Bezeichnung ein.

Notation 7.1.7 (Kategorie der Hüllenräume und stetigen Funktionen)**.** Es bezeichne Clo die Kategorie der Hüllenräume und stetigen Funktionen (mit der gewöhnlichen Komposition und den gewöhnlichen Identitäten).

Notation 7.1.8 (Beschränkung auf differenzierte Objekte)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Hüllenräume (bzw. Hüllenstrukturen) sind. Dann bezeichne $\mathcal{C}_0$ diejenige volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$, deren Objektklasse genau aus den differenzierten Hüllenräumen (bzw. differenzierten Hüllenstrukturen) aus $|\mathcal{C}|$ besteht.

Es steht somit Clo_0 für die Kategorie der differenzierten Hüllenräume (die also die T_0-Eigenschaft erfüllen) und stetigen Funktionen. Clo_0 kann als lokal geordnete 2-Kategorie aufgefasst werden:

Lemma 7.1.9. Clo_0 *ist eine lokal geordnete* 2*-Kategorie bezüglich der folgenden, durch die Spezialisierungsordnung induzierten punktweisen Ordnung der Morphismenmengen:*

$$f \le g \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall x \in X)(f(x) \le_Y g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad f^\Gamma \subseteq g^\Gamma$$

für alle $f, g \in \mathsf{Clo}_0(X, Y)$.

Beweis. Jede stetige Funktion $f\colon X \to Y$ ist isoton bezüglich der Spezialisierungsordnung von X und Y. Außerdem sind $\mathfrak{Q}X$, $\mathfrak{Q}Y$ geordnete Mengen, da die Hüllenräume X, Y differenziert sind. Somit gilt $\mathsf{Clo}_0(X, Y) \subseteq \mathsf{Pos}(\mathfrak{Q}X, \mathfrak{Q}Y)$, und die Eigenschaft, eine lokal geordnete 2-Kategorie zu sein, überträgt sich von Pos auf Clo_0. Schließlich gilt

$$f^\Gamma \subseteq g^\Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in X)(\overline{\{f(x)\}} \subseteq \overline{\{g(x)\}}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in X)(f(x) \le_Y g(x)). \qquad \square$$

7.1.2 Das Quantaloid der vollstetigen Relationen

Über die Isomorphie von CRel und $\mathsf{ACS}^c_{\mathfrak{P}}$ lässt sich schnell ableiten, dass die vollstetige Hülle $R \mapsto R^\Gamma$ einen Nukleus auf dem Quantaloid CRel der stetigen Relationen induziert. Genauso wie wir das Quantaloid der superalgebraischen Hüllenstrukturen und vollstetigen, residuierten Abbildungen aus dem der stetigen, residuierten Abbildungen erhalten haben, kann damit auch das Quantaloid der vollstetigen Relationen aus dem der stetigen konstruiert werden.

Proposition 7.1.10. *Die Kompositionsabbildungen von* CRel *sind stetig bezüglich der vollstetigen Hülle, d. h. für alle stetigen Relationen* $R : X \rightharpoondown Y$ *und* $S : Y \rightharpoondown Z$ *zwischen Hüllenräumen gilt*

$$(S^\Gamma \circ R^\Gamma)^\Gamma = (S \circ R)^\Gamma.$$

Somit induziert die vollstetige Hülle einen Nukleus $N\colon \mathsf{CRel} \to \mathsf{CRel}$ *auf dem Quantaloid der Hüllenräume und stetigen Relationen. Dabei ist* N *auf der Klasse* $|\mathsf{CRel}|$ *der Objekte die Identität, und für* $X, Y \in |\mathsf{CRel}|$ *ist* $N_{XY}\colon \mathsf{CRel}(X, Y) \to \mathsf{CRel}(X, Y)$ *die vollstetige Hülle auf* $\mathsf{CRel}(X, Y)$*, also*

$$N_{XY}(R) = R^\Gamma.$$

Beweis. Nach Definition der vollstetigen Hülle und Proposition 5.2.30 gilt mit Theorem 3.3.7 und Korollar 3.3.15

$$\begin{aligned}(S^\Gamma \circ R^\Gamma)^\Gamma &= (\overline{((\overline{S^\exists})_\exists \circ (\overline{R^\exists})_\exists)^\exists})_\exists = (\overline{\overline{S^\exists} \circ \overline{R^\exists}})_\exists = (\overline{S^\exists \circ R^\exists})_\exists = (\overline{(S \circ R)^\exists})_\exists \\ &= (S \circ R)^\Gamma.\end{aligned} \qquad \square$$

Definition 7.1.11 (Das Quantaloid der vollstetigen Relationen)**.** Mit dem durch die vollstetige Hülle induzierten Nukleus N aus der vorigen Proposition sei das *Quantaloid* CCRel *der Hüllenräume und vollstetigen Relationen* definiert durch

$$\mathsf{CCRel} = \mathsf{CRel}_N$$

(siehe Theorem 4.3.15 für die Details). Die Morphismenmengen $\mathsf{CCRel}(X, Y)$ sind somit identisch mit den bereits früher betrachteten vollständigen Verbänden $\mathsf{CCRel}(X; Y)$ aller vollstetigen Relationen zwischen X und Y. Die Komposition $\odot$ in CCRel ist nach Definition gegeben durch

$$S \odot R = (S \circ R)^{\Gamma} = \left(\overline{(S \circ R)^{\exists}}\right)_{\exists} = \left(\overline{S^{\exists} \circ R^{\exists}}\right)_{\exists} = (S^{\exists} \odot R^{\exists})_{\exists},$$

und laut Proposition 6.2.24 ist

$$x(S \odot R) = x(S \circ R)^{\Gamma} = \overline{x(S \circ R)}.$$

Die Identität auf X in CCRel ist gerade die duale Spezialisierungsordnung von X:

$$i_X = (\mathrm{id}_X)^{\Gamma} = \left(\overline{(\mathrm{id}_X)^{\exists}}\right)_{\exists} = \left(\overline{\mathrm{id}_{\mathfrak{P}X}}\right)_{\exists} = ((\Gamma_X)^{\sim})_{\exists} = (\Gamma_X)_{\exists} = \geq_{\mathfrak{Q}X}$$

(vergleiche auch Korollar 3.3.11 und Lemma 6.1.13).

Die obige Gleichung $\left(\overline{\mathrm{id}_{\mathfrak{P}X}}\right)_{\exists} = \geq_{\mathfrak{Q}X}$ für i_X sieht man nach Definition von $(\,\cdot\,)_{\exists}$ und der vollstetigen Hülle auch leicht elementweise:

$$(x, y) \in \left(\overline{\mathrm{id}_{\mathfrak{P}X}}\right)_{\exists} \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \overline{\{x\}}.$$

In Korollar 3.3.15 hatten wir gezeigt, dass $(\,\cdot\,)^{\exists}$ und $(\,\cdot\,)_{\exists}$ funktoriell sind bezüglich der gewöhnlichen Komposition von Relationen und Funktionen. Dasselbe gilt auch hinsichtlich der Komposition $\odot$.

Lemma 7.1.12. *Seien X, Y, Z Hüllenräume.*

(a) Für alle vollstetigen Relationen $R : X \rightharpoondown Y$, $S : Y \rightharpoondown Z$ gilt

$$(S \odot R)^{\exists} = \overline{S^{\exists} \circ R^{\exists}} = S^{\exists} \odot R^{\exists} \quad \textit{und} \quad (i_X)^{\exists} = \overline{\mathrm{id}_{\mathfrak{P}X}} = i_{\mathfrak{P}X}.$$

(b) Für alle vollstetigen residuierten Abbildungen $f \colon \bar{\mathfrak{P}}X \to \bar{\mathfrak{P}}Y$, $g \colon \bar{\mathfrak{P}}Y \to \bar{\mathfrak{P}}Z$ gilt

$$(g \odot f)_{\exists} = g_{\exists} \odot f_{\exists} \quad \textit{und} \quad (i_{\bar{\mathfrak{P}}X})_{\exists} = i_X.$$

Beweis. Aussage (a) folgt unmittelbar aus der Definition von CCRel. Zu (b). Es ist

$$(g \odot f)_{\exists} = \left(\overline{((g \circ f)_{\exists})^{\exists}}\right)_{\exists} = \left((g \circ f)_{\exists}\right)^{\Gamma} = (g_{\exists} \circ f_{\exists})^{\Gamma} = g_{\exists} \odot f_{\exists}$$

und $(i_{\bar{\mathfrak{P}}X})_{\exists} = \left(\overline{\mathrm{id}_{\bar{\mathfrak{P}}X}}\right)_{\exists} = \left(\overline{(\mathrm{id}_X)^{\exists}}\right)_{\exists} = (\mathrm{id}_X)^{\Gamma} = i_X$. □

Analog zum Fall für stetige Morphismen ist das Quantaloid der Hüllenräume und vollstetigen Relationen isomorph zum Quantaloid der *klassischen* Hüllenstrukturen und vollstetigen, residuierten Abbildungen. Einen Isomorphismus erhalten wir durch geeignete Einschränkung des Funktors $\bar{\mathfrak{P}} \colon \mathsf{CRel} \to \mathsf{ACS}^{c}_{\mathfrak{P}}$.

Definition 7.1.13 (Hüllenstrukturfunktor)**.** Aus dem Hüllenstrukturfunktor $\bar{\mathfrak{P}}$ ergibt sich nach Lemma 7.1.12 durch Restriktion und Co-Restriktion ein ebenso bezeichneter Funktor $\bar{\mathfrak{P}}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$, der wiederum *Hüllenstrukturfunktor* genannt wird. Analog entsteht der inverse Funktor $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{CCRel}$.

Nach Konstruktion ist nun klar:

Theorem 7.1.14. *Die Quantaloide* CCRel *und* $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ *sind isomorph. Dabei sind*

$$\bar{\mathfrak{P}}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \quad \textit{und} \quad \bar{\mathfrak{P}}^{-1}\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{CCRel}$$

zueinander inverse Quantaloid-Isomorphismen.

Beweis. Vergleiche Lemma 7.1.12 und Theorem 3.3.7. □

Wir betrachten noch den Spezialfall *funktionaler* vollstetiger Relationen $R : X \rightharpoondown Y$. Das waren solche, die durch $R = f^{\Gamma}$ aus einer stetigen Funktion $f\colon X \to Y$ erzeugt werden, welche für differenzierte Hüllenräume sogar eindeutig bestimmt ist (siehe Definition 6.2.31 und die nachfolgenden Resultate).

Lemma 7.1.15. *Seien X, Y, Z Hüllenräume.*

(a) Sind $R : X \rightharpoondown Y$, $S : Y \rightharpoondown Z$ funktionale vollstetige Relationen, so ist auch die vollstetige Relation $S \odot R : X \rightharpoondown Z$ funktional.

Darüber hinaus gilt: Aus $R = f^{\Gamma}$ und $S = g^{\Gamma}$ folgt $S \odot R = (g \circ f)^{\Gamma}$.

(b) Die vollstetige Relation $i_X : X \rightharpoondown X$ ist funktional, und es ist $i_X = (\mathrm{id}_X)^{\Gamma}$.

Beweis. Ist $R = f^{\Gamma}$ und $S = g^{\Gamma}$, so folgt mit Proposition 7.1.10

$$S \odot R = g^{\Gamma} \odot f^{\Gamma} = (g^{\Gamma} \circ f^{\Gamma})^{\Gamma} = (g \circ f)^{\Gamma}.$$

Der Rest ist klar. □

Definition 7.1.16 (Kategorie der funktionalen vollstetigen Relationen)**.** Es sei $\mathsf{CCRel}^{\vee}$ (bzw. $\mathsf{CCRel}_0^{\vee}$) die Kategorie der (differenzierten) Hüllenräume und funktionalen, vollstetigen Relationen. Als Unterkategorien des Quantaloids CCRel sind $\mathsf{CCRel}^{\vee}$ und $\mathsf{CCRel}_0^{\vee}$ lokal geordnete 2-Kategorien.

Theorem 7.1.17. *Die lokal geordneten 2-Kategorien* Clo_0 *und* $\mathsf{CCRel}_0^{\vee}$ *sind isomorph.*

Beweis. Da im Fall differenzierter Hüllenräume die (stetige) erzeugende Funktion einer funktionalen vollstetigen Relation eindeutig bestimmt ist, erhält man nach Lemma 7.1.9 und Lemma 7.1.15 einen 2-Isomorphismus $F\colon \mathsf{Clo}_0 \to \mathsf{CCRel}_0^{\vee}$ durch $F(X) = X$ für $X \in |\mathsf{Clo}_0|$ und $F(f) = f^{\Gamma}$ für $f \in \mathsf{Clo}_0(X, Y)$. □

Ist $R : X \rightharpoondown Y$ eine funktionale, vollstetige Relation mit $R = f^{\Gamma}$, so ist die kanonisch induzierte residuierte Abbildung von $\mathfrak{C}X$ in $\mathfrak{C}Y$ gegeben durch

$$\overrightarrow{R^{\exists}} = \overrightarrow{(f^{\Gamma})^{\exists}} = \overrightarrow{\overline{f}^{\exists}} = \overrightarrow{f^{\exists}} = \overrightarrow{f_{\to}}$$

mit $\overrightarrow{f_{\to}}(C) = \overline{f[C]}$ für alle $C \in \mathcal{C}X$, und ihr Residual ist

$$(\overrightarrow{R^{\exists}})^{*} = (\overrightarrow{f_{\to}})^{*} = \overrightarrow{(f_{\to})^{*}} = \overrightarrow{f_{\leftarrow}}$$

mit $\overrightarrow{f_{\leftarrow}}(D) = f^{-1}[D]$ für alle $D \in \mathcal{C}Y$ (siehe Korollar 6.2.19).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{ACS} \arrow[dl, shift left, "\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}"] \arrow[dr, shift left, "\mathfrak{X}"] \arrow[dd, shift left, "\mathfrak{L}"] & \\
\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \arrow[ur, shift left, "\mathfrak{I}"] \arrow[rr, shift right, "\bar{\mathfrak{P}}^{-1}"'] \arrow[dr, shift left, "\mathfrak{L}\mathfrak{I}"] & & \mathsf{CCRel} \arrow[ul, shift left, "\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}"] \arrow[ll, shift right, "\bar{\mathfrak{P}}"'] \arrow[dl, shift left, "\mathfrak{C}"] \\
 & \mathsf{SL} \arrow[ul, shift left, "\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}"] \arrow[ur, shift left, "\mathfrak{M}"] \arrow[uu, shift left, "\mathfrak{K}"] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 7.1: Quantaloid-Äquivalenzen

7.2 Quantaloid-Äquivalenzen

In diesem Abschnitt wird für jeden Funktor aus Abbildung 7.1 gezeigt, dass er Teil einer adjungierten Quantaloid-Äquivalenz ist.

In der folgenden Tabelle erinnern wir zunächst an die beteiligten Quantaloide und danach an die bereits bekannten Funktoren.

Bezeichnung	Quantaloid
ACS	Superalgebraische Hüllenstrukturen und vollstetige, residuierte Abbildungen (mit $\odot$ und i_C)
$\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$	Klassische Hüllenstrukturen und vollstetige, residuierte Abbildungen
CCRel	Hüllenräume und vollstetige Relationen (mit $\odot$ und i_X)
SL	Vollständige Verbände und residuierte Abbildungen

Im vorigen Abschnitt wurde der *Hüllenstrukturfunktor* $\bar{\mathfrak{P}}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ festgelegt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{P}}(X) &= (\mathfrak{P}X, \Gamma_X) && \text{für } X \in |\mathsf{CCRel}|, \\ \bar{\mathfrak{P}}(R) &= R^{\exists} && \text{für } R \in \mathsf{CCRel}(X, Y). \end{aligned}$$

$\bar{\mathfrak{P}}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ ist ein Quantaloid-Isomorphismus, dessen Inverse $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{CCRel}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{P}}^{-1}(C) &= (\mathfrak{P}^{-1}|C|, \gamma_C) && \text{für } C \in |\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}|, \\ \bar{\mathfrak{P}}^{-1}(f) &= f_{\exists} && \text{für } f \in \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}(C, D). \end{aligned}$$

Es war $R^{\exists}(A) = AR = \{\, y : \exists x (x \ R \ y) \,\}$, und es gilt $(x, y) \in f_{\exists} \Leftrightarrow y \in f(\{x\})$. In Kapitel 5 wurde bereits gezeigt, dass der *Hüllenbereichsfunktor* $\mathfrak{L}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{SL}$ eine Quantaloid-Äquivalenz ist (siehe Theorem 5.2.34). Dabei war $\mathfrak{L}$ bestimmt durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(C) &= C_{\gamma} && \text{für } C \in |\mathsf{ACS}|, \\ \mathfrak{L}(f) &= \overrightarrow{f} = \gamma_D^{\bullet} \circ f \circ \gamma_C^{\circ} && \text{für } f \in \mathsf{ACS}(C, D). \end{aligned}$$

$\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ ist eine volle Unterkategorie von ACS. Wir führen noch eine Notation für den zugehörigen Inklusionsfunktor ein:

Definition 7.2.1 (Inklusionsfunktor)**.** Es bezeichne $\mathfrak{I}\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{ACS}$ den *Inklusionsfunktor*, d. h. es sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(C) &= C && \text{für } C \in |\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}|, \\ \mathfrak{I}(f) &= f && \text{für } f \in \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}(C, D). \end{aligned}$$

Der Inklusionsfunktor ist trivialerweise ein 2-Funktor.

7.2.1 Hüllenräume und vollständige Verbände

Zu jedem Hüllenraum X erhält man einen vollständigen Verband durch den Hüllenverband $\mathfrak{C}X$. Diese Zuordnung lässt sich zu einem Funktor ausbauen, welcher durch Komposition aus bereits vorhandenen Funktoren entsteht.

Definition 7.2.2 (Hüllenverbandsfunktor)**.** Der *Hüllenverbandsfunktor* $\mathfrak{C}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{SL}$ sei definiert durch $\mathfrak{C} := \mathfrak{L}\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{L} \circ \mathfrak{I} \circ \bar{\mathfrak{P}}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(X) &= (\mathcal{C}X, \subseteq) = (\bar{\mathfrak{P}}X)_\gamma && \text{für } X \in |\mathsf{CCRel}|, \\ \mathfrak{C}(R) &= \overrightarrow{R}^{\exists} && \text{für } R \in \mathsf{CCRel}(X, Y), \end{aligned}$$

also $\mathfrak{C}(R)(C) = \overline{CR}$ für alle $C \in \mathcal{C}X$.

Um einen Funktor in der umgekehrten Richtung zu konstruieren, ordnen wir zunächst jedem vollständigen Verband L seinen Schnittraum $\mathfrak{M}L$ zu, da $\mathfrak{C}\mathfrak{M}L = \mathfrak{N}L$ zu L isomorph ist. Wie lässt sich nun zu einer residuierten Abbildung $\varphi\colon L \to M$ zwischen vollständigen Verbänden eine vollstetige Relation zwischen den Schnitträumen $\mathfrak{M}L$ und $\mathfrak{M}M$ festlegen, so dass insgesamt ein 2-Funktor entsteht? Aus Beispiel 6.2.21 wissen wir, dass die Residuiertheit von φ gleichbedeutend ist mit der *Stetigkeit* von $\varphi\colon \mathfrak{M}L \to \mathfrak{M}M$. Es liegt somit nahe, der stetigen Abbildung φ ihre vollstetige Hülle

$$\mathfrak{M}(\varphi) := \varphi^\Gamma$$

zuzuordnen. Nach Definition der vollstetigen Hülle (vergleiche auch Beispiel 6.2.27) gilt

$$(x, y) \in \varphi^\Gamma \iff y \in \Delta_M(\{\varphi(x)\}) = {\downarrow_M}\varphi(x) \iff y \leq_M \varphi(x). \tag{7.1}$$

Die Co-Restriktion $N^\bullet\colon \mathsf{CRel} \to \mathsf{CRel}_N = \mathsf{CCRel}$ des durch die vollstetige Hülle $R \mapsto N(R) = R^\Gamma$ induzierten Nukleus N auf CRel ist ein Quantaloid-Homomorphismus (Theorem 4.3.15 und Proposition 7.1.10), es ist also für alle $\varphi \in \mathsf{SL}(L, M)$, $\psi \in \mathsf{SL}(M, N)$

$$(\psi \circ \varphi)^\Gamma = (\psi^\Gamma \circ \varphi^\Gamma)^\Gamma = \psi^\Gamma \odot \varphi^\Gamma \quad \text{und} \quad (\mathrm{id}_L)^\Gamma = {\geq_L} = i_{\mathfrak{M}L}.$$

Darüber hinaus gilt für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{SL}(L, M)$

$$\varphi \leq \psi \iff \varphi^\Gamma \subseteq \psi^\Gamma,$$

denn $\varphi \leq \psi$ ist äquivalent zu $x\varphi^\Gamma = {\downarrow_M}\varphi(x) \subseteq {\downarrow_M}\psi(x) = x\psi^\Gamma$ für jedes $x \in L$. Insgesamt erhalten wir folglich einen 2-Funktor $\mathfrak{M}\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{CCRel}$.

Definition 7.2.3 (Schnittraumfunktor)**.** Der 2-Funktor $\mathfrak{M}\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{CCRel}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(L) &= (|L|, \Delta_L) && \text{für } L \in |\mathsf{SL}|, \\ \mathfrak{M}(\varphi) &= \varphi^\Gamma && \text{für } \varphi \in \mathsf{SL}(L, M) \end{aligned}$$

und wird *Schnittraumfunktor* genannt.

Unser Ziel ist nun, die 2-Funktoren $\mathfrak{C}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{SL}$ und $\mathfrak{M}\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{CCRel}$ zu einer adjungierten Quantaloid-Äquivalenz

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \eta, \varepsilon)\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{SL}$$

auszubauen. Dafür benötigen wir als erstes einen natürlichen Isomorphismus

$$\eta\colon 1_{\mathsf{CCRel}} \Rightarrow \mathfrak{M} \circ \mathfrak{C},$$

also insbesondere zu jedem Hüllenraum X einen CCRel-Isomorphismus $\eta_X : X \rightharpoonup \mathfrak{M}\mathfrak{C}X$. Nach Definition ist $\mathfrak{M}\mathfrak{C}X = (\mathcal{C}X, \Delta_{\mathfrak{C}X})$, wobei der Schnittoperator $\Delta_{\mathfrak{C}X}$ gegeben ist durch

$$\Delta_{\mathfrak{C}X}(\mathcal{X}) = {\downarrow_{\mathfrak{C}X}} \bigvee_{\mathfrak{C}X} \mathcal{X} = \{\, C \in \mathcal{C}X : C \subseteq \Gamma_X(\textstyle\bigcup \mathcal{X}) \,\} \tag{7.2}$$

für alle $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}X$. Eine kanonische Abbildung von $|X|$ in $\mathcal{C}X$ ist $\mathsf{p}_X\colon X \to \mathfrak{C}X$ aus Definition 6.1.3, die jedem $x \in X$ den Punktabschluss $\mathsf{p}_X(x) = \Gamma_X(\{x\}) = {\downarrow_X} x$ zuordnet. Wir fassen p_X im folgenden meist als Abbildung von X in $\mathfrak{M}\mathfrak{C}X$, also als Abbildung zwischen Hüllenräumen auf. Als solche ist p_X stetig, denn für alle $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}X$ gilt

$$\mathsf{p}_X^{-1}[\Gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{C}X}(\mathcal{X})] = \mathsf{p}_X^{-1}[\Delta_{\mathfrak{C}X}(\mathcal{X})] = \{\, x \in X : \mathsf{p}_X(x) \in \Delta_{\mathfrak{C}X}(\mathcal{X}) \,\} = \Gamma_X(\textstyle\bigcup \mathcal{X}),$$

also sind Urbilder abgeschlossener Mengen unter p_X wieder abgeschlossen. Die Relation $\eta_X : X \rightharpoonup \mathfrak{M}\mathfrak{C}X$ sei nun die vollstetige Hülle von p_X, also

$$\eta_X := (\mathsf{p}_X)^\Gamma.$$

Für $(x, C) \in |X| \times \mathcal{C}X$ gilt dann

$$(x, C) \in \eta_X \quad\iff\quad C \in \Delta_{\mathfrak{C}X}(\{{\downarrow_X} x\}) \quad\iff\quad C \subseteq {\downarrow_X} x.$$

Im Gegensatz zur stetigen Abbildung p_X in der Kategorie CRel besitzt die vollstetige Relation η_X in der Kategorie CCRel stets eine Inverse η_X^{-1}. Diese erhält man einfach durch Dualisierung der Ordnung: Für $(C, x) \in \mathcal{C}X \times |X|$ sei

$$(C, x) \in \eta_X^{-1} \quad :\iff \quad {\downarrow_X} x \subseteq C \quad\iff\quad x \in C.$$

Für jedes $C \in \mathcal{C}X$ ist dann $\eta_X^{-1}(C, \_) = C\eta_X^{-1} = \{\, x \in X : x \in C \,\} = C \in \mathcal{C}X$, und für alle $A \in \mathcal{C}X$ gilt

$$\{\, C \in \mathfrak{M}\mathfrak{C}X : C\eta_X^{-1} \subseteq A \,\} = \{\, C \in \mathcal{C}X : C \subseteq A \,\} = {\downarrow_{\mathfrak{C}X}} A \in \mathcal{C}\mathfrak{M}\mathfrak{C}X.$$

Somit ist $\eta_X^{-1} : \mathfrak{M}\mathfrak{C}X \rightharpoonup X$ eine vollstetige Relation (Korollar 6.2.16 und Theorem 6.2.25). Tatsächlich sind η_X und η_X^{-1} zueinander inverse CCRel-Isomorphismen, d. h. sie erfüllen $\eta_X^{-1} \odot \eta_X = i_X$ und $\eta_X \odot \eta_X^{-1} = i_{\mathfrak{M}\mathfrak{C}X}$. Denn einerseits gilt für jedes $x \in X$

$$x(\eta_X^{-1} \odot \eta_X) = \Gamma_X(x(\eta_X^{-1} \circ \mathsf{p}_X)) = \Gamma_X(\mathsf{p}_X(x)\eta_X^{-1}) = \Gamma_X(\mathsf{p}_X(x)) = {\downarrow_X} x = x i_X,$$

und andererseits ergibt sich für alle $A, C \in \mathcal{C}X$

$$\begin{aligned}(A, C) \in (\eta_X \odot \eta_X^{-1}) &\iff C \in \Delta_{\mathfrak{C}X}(A(\mathsf{p}_X \circ \eta_X^{-1})) = \Delta_{\mathfrak{C}X}(\{\, \downarrow_X x : x \in A \,\}) \\ &\iff C \subseteq A \\ &\iff (A, C) \in i_{\mathfrak{M}\mathfrak{C}X}.\end{aligned}$$

Der letzten Äquivalenz liegt zugrunde, dass für jeden Hüllenraum Y die Identität i_Y gerade durch die duale Spezialisierungsordnung von Y gegeben ist (vergleiche Definition 7.1.11) und dass jede quasigeordnete Menge P die Spezialisierung des Schnittraums $\mathfrak{M}P$ ist (da $\mathfrak{C}\mathfrak{M}P$ die kleinste Standardvervollständigung von P ist, siehe Proposition 6.1.22). Somit ist $i_{\mathfrak{M}\mathfrak{C}X}$ die duale Ordnung $\supseteq$ von $\mathfrak{C}X$.

Wir zeigen noch, dass $\eta \colon 1_{\mathsf{CCRel}} \Rightarrow \mathfrak{M} \circ \mathfrak{C}$ mit den Komponenten η_X eine natürliche Transformation ist. Seien X und Y Hüllenräume und $R : X \rightharpoonup Y$ eine vollstetige Relation. Für jedes $x \in X$ gilt aufgrund der Vollstetigkeit von R

$$\overrightarrow{R}^{\exists}(\downarrow_X x) = xR = \Gamma_Y(xR) = \Gamma_Y(\textstyle\bigcup\{\, \downarrow_Y y : x \; R \; y \,\}),$$

zusammen mit (7.2) also

$$\begin{aligned}x(\overrightarrow{R}^{\exists} \circ \mathsf{p}_X)^{\Gamma} &= \Delta_{\mathfrak{C}Y}(\{\overrightarrow{R}^{\exists}(\downarrow_X x)\}) = \Delta_{\mathfrak{C}Y}(\{xR\}) = \downarrow_{\mathfrak{C}Y} xR \\ &= \{\, C \in \mathcal{C}Y : C \subseteq \Gamma_Y(\textstyle\bigcup\{\, \downarrow_Y y : x \; R \; y \,\}) \,\} = \Delta_{\mathfrak{C}Y}(\{\, \downarrow_Y y : x \; R \; y \,\}) = x(\mathsf{p}_Y \circ R)^{\Gamma}\end{aligned}$$

und folglich

$$\mathfrak{M}\mathfrak{C}R \odot \eta_X = (\overrightarrow{R}^{\exists} \circ \mathsf{p}_X)^{\Gamma} = (\mathsf{p}_Y \circ R)^{\Gamma} = \eta_Y \odot R.$$

Insgesamt ist demnach $\eta \colon 1_{\mathsf{CCRel}} \Rightarrow \mathfrak{M} \circ \mathfrak{C}$ ein natürlicher Isomorphismus.

Bemerkung 7.2.4. Falls die obige vollstetige Relation $R : X \rightharpoonup Y$ sogar *funktional* ist, also $R = f^{\Gamma}$ für eine stetige Funktion $f \colon X \to Y$, so folgt die gerade bewiesene Gleichung für die natürliche Transformation bereits aus früheren Resultaten: Nach Korollar 6.2.19 gilt

$$\overrightarrow{f_{\rightarrow}} \circ \mathsf{p}_X = \mathsf{p}_Y \circ f$$

und wegen $\mathfrak{M}\mathfrak{C}R = (\overrightarrow{f}^{\exists})^{\Gamma} = (\overrightarrow{f_{\rightarrow}})^{\Gamma}$ somit

$$\mathfrak{M}\mathfrak{C}R \odot \eta_X = (\overrightarrow{f_{\rightarrow}} \circ \mathsf{p}_X)^{\Gamma} = (\mathsf{p}_Y \circ f)^{\Gamma} = \eta_Y \odot R.$$

Als nächstes suchen wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\varepsilon \colon \mathfrak{C} \circ \mathfrak{M} \Rightarrow 1_{\mathsf{SL}}.$$

Ein solcher ist leicht zu finden: Für jeden vollständigen Verband L ist $\mathfrak{C}\mathfrak{M}L = \mathfrak{N}L \cong L$, und die Abbildung $\varepsilon_L \colon \mathfrak{C}\mathfrak{M}L \to L$ mit $\varepsilon_L(\downarrow_L x) := x$ ist ein Ordnungsisomorphismus. Überdies ist ε_L in L natürlich, weil für jede residuierte Abbildung $\varphi \colon L \to M$ zwischen vollständigen Verbänden aufgrund von

$$\mathfrak{C}\mathfrak{M}\varphi = \overrightarrow{(\varphi^{\Gamma})}^{\exists} = \overrightarrow{\overrightarrow{\varphi}}^{\exists} = \overrightarrow{\varphi}^{\exists} = \overrightarrow{\varphi_{\rightarrow}} = \Delta_M^{\bullet} \circ \varphi_{\rightarrow} \circ \Delta_L^{\circ}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}X \arrow[r, "\mathfrak{C}\eta_X"] \arrow[dr, equal] & \mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{C}X \arrow[d, "\varepsilon_{\mathfrak{C}X}"] \\
& \mathfrak{C}X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}L \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{M}L}"] \arrow[dr, equal] & \mathfrak{M}\mathfrak{C}\mathfrak{M}L \arrow[d, "\mathfrak{M}\varepsilon_L"] \\
& \mathfrak{M}L
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 7.2: Dreiecksgleichungen für $(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \eta, \varepsilon)\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{SL}$

für alle $x \in L$ gilt:

$$(\varepsilon_M \circ \mathfrak{C}\mathfrak{M}\varphi)({\downarrow_L} x) = \varepsilon_M({\downarrow_M} \textstyle\bigvee_M \varphi[{\downarrow_L} x]) = \bigvee_M \varphi[{\downarrow_L} x] = \varphi(x) = (\varphi \circ \varepsilon_L)({\downarrow_L} x).$$

Damit haben wir bereits $\varepsilon\colon \mathfrak{M} \circ \mathfrak{C} \Rightarrow 1_{\mathsf{SL}}$ als natürlichen Isomorphismus nachgewiesen.

Abschließend zeigen wir, dass $(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \eta, \varepsilon)$ eine adjungierte Situation ist, also die in Abbildung 7.2 dargestellten Dreiecksgleichungen gelten. Zum einen muss dafür $\varepsilon_{\mathfrak{C}X} \circ \mathfrak{C}\eta_X = 1_{\mathfrak{C}X}$ für jeden Hüllenraum X gelten. Es ist

$$\mathfrak{C}\eta_X = \overrightarrow{(\mathsf{p}_X^\Gamma)^{\exists}} = \overset{\Longrightarrow}{\mathsf{p}_X^{\exists}} = \overrightarrow{\mathsf{p}_X^{\exists}} = \Delta^\bullet_{\mathfrak{C}X} \circ (\mathsf{p}_X)_\to \circ \Gamma_X^\circ,$$

und damit verifiziert man für alle $C \in \mathfrak{C}X$

$$(\varepsilon_{\mathfrak{C}X} \circ \mathfrak{C}\eta_X)(C) = \varepsilon_{\mathfrak{C}X}(\Delta_{\mathfrak{C}X}(\{\, \Gamma_X(\{x\}) : x \in C \,\})) = \varepsilon_{\mathfrak{C}X}({\downarrow_{\mathfrak{C}X}} C) = C = 1_{\mathfrak{C}X}(C).$$

Zum anderen ist für jeden vollständigen Verband L die Gleichung $\mathfrak{M}\varepsilon_L \odot \eta_{\mathfrak{M}L} = i_{\mathfrak{M}L}$ zu zeigen. Es gilt

$$(\varepsilon_L \circ \mathsf{p}_{\mathfrak{M}L})(x) = \varepsilon_L(\Delta_L(\{x\})) = \varepsilon_L({\downarrow_L} x) = x$$

für alle $x \in \mathfrak{M}L = (|L|, \Delta_L)$, also $\varepsilon_L \circ \mathsf{p}_{\mathfrak{M}L} = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}L}$. Damit folgt nach Definition von $\mathfrak{M}$ auch

$$\mathfrak{M}\varepsilon_L \odot \eta_{\mathfrak{M}L} = (\varepsilon_L^\Gamma \circ \mathsf{p}_{\mathfrak{M}L}^\Gamma)^\Gamma = (\varepsilon_L \circ \mathsf{p}_{\mathfrak{M}L})^\Gamma = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}L}^\Gamma = i_{\mathfrak{M}L}.$$

Alles in allem haben wir bewiesen:

Theorem 7.2.5. *Die Quantaloide* CCRel *und* SL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \eta, \varepsilon)\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{SL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. □

Die vollstetigen Relationen sind also die aus verbandstheoretischer Sicht passenden Morphismen zwischen Hüllenräumen.

Bemerkung 7.2.6. Aus der Äquivalenz von CCRel und SL folgt, dass zwei Hüllenräume X und Y genau dann in CCRel isomorph sind, wenn die vollständigen Verbände $\mathfrak{C}X$ und $\mathfrak{C}Y$ ihrer abgeschlossenen Mengen isomorph sind (vergleiche Bemerkung 5.2.35). Die Isomorphieklassen von Hüllenräumen sind bezüglich vollstetiger Relationen demnach bedeutend größer als sie es aus topologischer Sicht, d. h. hinsichtlich stetiger Funktionen, sind.

7.2.2 Hüllenstrukturen und vollständige Verbände

Wir betrachten weitere Verbindungen zwischen den in Abbildung 7.1 auf Seite 201 dargestellten Quantaloiden. Wie bereits erwähnt, ist der Hüllenbereichsfunktor $\mathfrak{L}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{SL}$ eine Quantaloid-Äquivalenz und der Hüllenstrukturfunktor $\bar{\mathfrak{P}}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ ein Quantaloid-Isomorphismus. Zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathfrak{I}\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{ACS}$ und den Quantaloid-Äquivalenzen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}$ ergeben sich durch Komposition eine Reihe interessanter 2-Funktoren, darunter

$$\mathfrak{L}\mathfrak{I} = \mathfrak{L} \circ \mathfrak{I}\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{SL} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{P}} \circ \mathfrak{M}\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}.$$

Offensichtlich entsteht $\mathfrak{L}\mathfrak{I}$ durch Restriktion von $\mathfrak{L}$ auf $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$, und wegen $\mathfrak{C} = \mathfrak{L}\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}$ ist

$$\mathfrak{L}\mathfrak{I} = \mathfrak{C} \circ \bar{\mathfrak{P}}^{-1}.$$

Damit resultiert aus der Anwendung des Quantaloid-Isomorphismus $\bar{\mathfrak{P}}$ auf die in Theorem 7.2.5 formulierte Quantaloid-Äquivalenz sofort das folgende Korollar.

Korollar 7.2.7. *Die Quantaloide $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ und SL sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{I}, \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}, 1_{\bar{\mathfrak{P}}} * \eta * 1_{\bar{\mathfrak{P}}^{-1}}, \varepsilon)\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{SL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. Dabei ist für jeden Hüllenraum X

$$(1_{\bar{\mathfrak{P}}} * \eta * 1_{\bar{\mathfrak{P}}^{-1}})_{\bar{\mathfrak{P}}X} = \bar{\mathfrak{P}}(\eta_X) = (\mathsf{p}_X^{\Gamma})^{\exists} = \overline{(\mathsf{p}_X)_{\rightarrow}} = {\downarrow_{\mathfrak{C}X}} \circ (\mathsf{p}_X)_{\rightarrow}.$$

Beweis. Mit Korollar 2.3.7. □

Als nächstes möchten wir einen 2-Funktor in der entgegengesetzten Richtung des Hüllenbereichsfunktors $\mathfrak{L}$ festlegen. Ein solcher 2-Funktor von SL in ACS ist mit $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}$ bereits vorhanden.

Definition 7.2.8 (Hüllenstruktur-Schnittraumfunktor)**.** Der Funktor $\mathfrak{K}\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{ACS}$, den wir auch *Hüllenstruktur-Schnittraumfunktor* nennen, sei definiert durch $\mathfrak{K} := \mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M} = \mathfrak{I} \circ \bar{\mathfrak{P}} \circ \mathfrak{M}$, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(L) &= \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}(L) = (\mathfrak{P}|L|, \Delta_L) && \text{für } L \in |\mathsf{SL}|, \\ \mathfrak{K}(\varphi) &= \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}(\varphi) = (\varphi^{\Gamma})^{\exists} = \overline{\varphi^{\exists}} = {\downarrow_M} \circ \varphi_{\rightarrow} && \text{für } \varphi \in \mathsf{SL}(L, M), \end{aligned}$$

siehe auch Lemma 6.2.26. Natürlich ist $\mathfrak{K}$ ein 2-Funktor, und aus $\mathfrak{K}$ entsteht umgekehrt $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}$ durch Co-Restriktion.

Wir skizzieren, wie sich $\mathfrak{L}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{SL}$ und $\mathfrak{K}\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{ACS}$ zu einer adjungierten Quantaloid-Äquivalenz ausbauen lassen. Dies kann ganz ähnlich wie in Korollar 7.2.7 für $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ und SL erreicht werden. Nach Definition ist

$$\mathfrak{L} \circ \mathfrak{K} = \mathfrak{L}\mathfrak{I} \circ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M} = \mathfrak{C} \circ \mathfrak{M}.$$

Somit können wir als Co-Einheit der gewünschten adjungierten Äquivalenz den bereits in Theorem 7.2.5 und Korollar 7.2.7 vorkommenden natürlichen Isomorphismus $\varepsilon\colon \mathfrak{L} \circ \mathfrak{K} \Rightarrow 1_{\mathsf{SL}}$ wählen. Auch die Einheit $\tilde{\eta}\colon 1_{\mathsf{ACS}} \Rightarrow \mathfrak{K} \circ \mathfrak{L}$ kann nach dem Vorbild von $1_{\bar{\mathfrak{P}}} * \eta * 1_{\bar{\mathfrak{P}}^{-1}}$ aus Korollar 7.2.7 festgelegt werden, wie die Identität

$$(\mathfrak{K} \circ \mathfrak{L})(C) = (\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}\mathfrak{I})(C)$$

im Falle *klassischer* Hüllenstrukturen $C = \bar{\mathfrak{P}}X$ nahelegt. Für jeden Hüllenraum X ist

$$(1_{\bar{\mathfrak{P}}} * \eta * 1_{\bar{\mathfrak{P}}^{-1}})_{\bar{\mathfrak{P}}X} = \overline{(\mathsf{p}_X)_{\rightarrow}},$$

und die Abbildung $(\mathsf{p}_X)_{\rightarrow} \colon \bar{\mathfrak{P}}X \to \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}\mathfrak{C}X = (\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}\mathfrak{I})(\bar{\mathfrak{P}}X)$ wird folgendermaßen gebildet:

$$(\mathsf{p}_X)_{\rightarrow}(A) = \mathsf{p}_X[A] = \{\, {\downarrow_X} x : x \in A \,\} = \Gamma_X[{\downarrow_{\bar{\mathfrak{P}}X}} A \cap \mathcal{S}\bar{\mathfrak{P}}X].$$

Wir verallgemeinern die Abbildung $(\mathsf{p}_X)_{\rightarrow}$ von klassischen Hüllenstrukturen $\bar{\mathfrak{P}}X$ auf beliebige Hüllenstrukturen C und definieren $\mathsf{P}_C \colon C \to \mathfrak{K}\mathfrak{L}C = (\mathfrak{P}|C_\gamma|, \Delta_{C_\gamma})$ durch

$$\mathsf{P}_C(x) = \gamma_C[{\downarrow_C} x \cap \mathcal{S}C].$$

Man sieht leicht, dass $\mathsf{P}_C = (\gamma_C^\bullet \restriction \mathcal{S}C)_{\rightarrow} \circ \mathsf{a}_C$ eine stetige, residuierte Abbildung ist (dabei ist $\mathsf{a}_C \colon C \to \mathfrak{P}\mathcal{S}C$ die Hüllen-Abbildung mit $\mathsf{a}_C(x) = {\downarrow_C} x \cap \mathcal{S}C$ aus Definition 3.1.11). Nun sei $\tilde{\eta}_C \colon C \to \mathfrak{K}\mathfrak{L}C$ die vollstetige Hülle von P_C, also

$$\tilde{\eta}_C := \overline{\mathsf{P}_C} = {\downarrow_{C_\gamma}} \circ \mathsf{P}_C.$$

Dann ist $\tilde{\eta}_C(x) = {\downarrow_{C_\gamma}} \gamma_C[{\downarrow_C} x \cap \mathcal{S}C]$, und man kann auf direkte Weise nachprüfen, dass $\tilde{\eta}_C$ ein ACS-Isomorphismus mit der Inversen $\tilde{\eta}_C^{-1} \colon \mathfrak{K}\mathfrak{L}C \to C$, $A \mapsto \bigvee_C A$ ist. Ohne Schwierigkeiten lässt sich außerdem zeigen, dass der Isomorphismus $\tilde{\eta}_C$ natürlich in C ist. Schließlich gelten auch die Dreiecksgleichungen, und man erhält insgesamt:

Theorem 7.2.9. *Die Quantaloide* ACS *und* SL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}, \tilde{\eta}, \varepsilon) \colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{SL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. □

Aus diesem Resultat ergeben sich durch geeignete Restriktion natürlich erneut Korollar 7.2.7 und damit auch Theorem 7.2.5.

7.2.3 Hüllenstrukturen und Hüllenräume

Aus den oben gezeigten Quantaloid-Äquivalenzen ergeben sich durch geeignete Komposition auch bisher noch nicht erwähnte Verbindungen in Abbildung 7.1 (Seite 201). Einen Weg in der umgekehrten Richtung des Inklusionsfunktors $\mathfrak{I} \colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{ACS}$, also von beliebigen superalgebraischen zu klassischen Hüllenstrukturen, liefert die Quantaloid-Äquivalenz $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}\mathfrak{L} \colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$, die folgendermaßen gebildet wird:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}\mathfrak{L}(C) &= (\mathfrak{P}|C_\gamma|, \Delta_{C_\gamma}) && \text{für } C \in |\mathsf{ACS}|, \\ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}\mathfrak{L}(f) &= {\downarrow_{C_\gamma}} \circ (\overrightarrow{f})_{\rightarrow} && \text{für } f \in \mathsf{ACS}(C, D). \end{aligned}$$

Analog zu $\mathfrak{I}$ und $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}\mathfrak{L}$ führt der 2-Funktor $\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}} \colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{ACS}$ von Hüllenräumen zu superalgebraischen Hüllenstrukturen, und eine Quantaloid-Äquivalenz in der entgegengesetzten Richtung erhalten wir durch $\mathfrak{M}\mathfrak{L} \colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{CCRel}$, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\mathfrak{L}(C) &= (|C_\gamma|, \Delta_{C_\gamma}) && \text{für } C \in |\mathsf{ACS}|, \\ \mathfrak{M}\mathfrak{L}(f) &= (\overrightarrow{f})^\Gamma && \text{für } f \in \mathsf{ACS}(C, D). \end{aligned}$$

Die soeben betrachteten Methoden, aus einer superalgebraischen Hüllenstruktur C eine klassische Hüllenstruktur bzw. einen Hüllenraum zu konstruieren, haben den Nachteil, dass sie gewissermaßen einen „Umweg" über den Hüllenbereich C_γ nehmen. Wir werden im folgenden noch einen nützlichen direkten Weg darstellen, indem wir das *Spektrum* $\mathcal{S}C$ von C zu einem Hüllenraum ausbauen (und gleichzeitig $\mathfrak{P}\mathcal{S}C$ zu einer klassischen Hüllenstruktur). Auf diese Weise erhalten wir 2-Funktoren $\mathfrak{X}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{CCRel}$ und $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$. Der letztere wird sich unter anderem als Linksadjungierter des Inklusionsfunktors $\mathfrak{I}$ herausstellen, womit insbesondere $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ als *reflektive Unterkategorie* von ACS nachgewiesen ist.

Für die folgenden Konstruktionen verwenden wir die für vollständige Verbände L bestimmte Kern-Abbildung

$$\mathsf{j}_L\colon \mathfrak{P}\mathcal{S}L \to L, \qquad \mathsf{j}_L(A) = \textstyle\bigvee_L A$$

und die Hüllen-Abbildung

$$\mathsf{a}_L\colon L \to \mathfrak{P}\mathcal{S}L, \qquad \mathsf{a}_L(x) = \downarrow_L x \cap \mathcal{S}L$$

aus Definition 3.1.11. Nach Lemma 3.1.12 ist $(\mathsf{j}_L, \mathsf{a}_L)$ für superalgebraische Verbände L ein adjungiertes Paar mit

$$\mathsf{j}_L \circ \mathsf{a}_L = \mathrm{id}_L \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_{\mathfrak{P}\mathcal{S}L} \leq \mathsf{a}_L \circ \mathsf{j}_L.$$

Damit sieht man sofort, dass sich für jede superalgebraische Hüllenstruktur C die Isotonie, Extensivität und Idempotenz der Hüllenoperation γ_C auf die zusammengesetzte Abbildung $\mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C\colon \mathfrak{P}\mathcal{S}C \to \mathfrak{P}\mathcal{S}C$ übertragen. Folglich ist

$$\mathfrak{X}C := (\mathcal{S}C, \mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C)$$

ein Hüllenraum und $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C = (\mathfrak{P}\mathcal{S}C, \mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C)$ eine klassische Hüllenstruktur. Nach Definition gilt für alle $A \subseteq \mathcal{S}C$

$$\Gamma_{\mathfrak{X}C}(A) = \downarrow_C \gamma_C(\textstyle\bigvee_C A) \cap \mathcal{S}C,$$

und das zugehörige Hüllensystem ist

$$\mathcal{C}\mathfrak{X}C = (\mathsf{a}_C \circ \gamma_C)[C] = \mathsf{a}_C[C_\gamma] = \{\, \downarrow_C \gamma_C(x) \cap \mathcal{S}C : x \in C \,\}.$$

Nachdem wir auf diese Weise mit jeder superalgebraischen Hüllenstruktur einen Hüllenraum und eine klassische Hüllenstruktur assoziieren können, stellt sich als nächstes die Frage, wie sich auch jeder vollstetigen, residuierten Abbildung $f\colon C \to D$ eine vollstetige Relation $\mathfrak{X}f$ zwischen $\mathfrak{X}C$ und $\mathfrak{X}D$ zuordnen lässt. Für die Antwort greifen wir auf Definition 3.2.11 zurück. Dort hatten wir bereits aus jeder Abbildung zwischen superalgebraischen Verbänden eine Relation zwischen den zugehörigen Spektren geformt. Für $f \in \mathsf{ACS}(C, D)$ sei dementsprechend

$$\mathfrak{X}f := f_{\triangleright}.$$

Da neben f auch die Abbildungen j_C und a_D residuiert sind, gilt zusammen mit Lemma 3.2.12 für alle $(u, v) \in \mathcal{S}C \times \mathcal{S}D$

$$\begin{aligned}
(u, v) \in \mathfrak{X}f = f_{\triangleright} \quad &\iff \quad v \leq_D f(u) \\
&\iff \quad v \in \downarrow_D f(u) \cap \mathcal{S}D = (\mathsf{a}_D \circ f \circ \mathsf{j}_C)(\{u\}) \\
&\iff \quad (u, v) \in (\mathsf{a}_D \circ f \circ \mathsf{j}_C)_{\exists} = \bar{\mathfrak{P}}^{-1}(\mathsf{a}_D \circ f \circ \mathsf{j}_C).
\end{aligned}$$

Damit wissen wir auch, wie die korrespondierende Abbildung $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f$ zwischen den klassischen Hüllenstrukturen $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C$ und $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}D$ aussieht. Es ist

$$\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f = \mathsf{a}_D \circ f \circ \mathsf{j}_C,$$

d. h. $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f$ wird analog zur Hüllenoperation $\mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C$ gebildet. Da f residuiert und D superalgebraisch ist, gilt für jedes $A \subseteq \mathcal{S}C$

$$\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f(A) = {\downarrow_D} f(\textstyle\bigvee_C A) \cap \mathcal{S}D = {\downarrow_D} f[A] \cap \mathcal{S}D.$$

Wir zeigen nun, dass durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}(C) &= (\mathfrak{P}\mathcal{S}C, \mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C) && \text{für } C \in |\mathsf{ACS}|, \\ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}(f) &= \mathsf{a}_D \circ f \circ \mathsf{j}_C && \text{für } f \in \mathsf{ACS}(C,D) \end{aligned}$$

tatsächlich ein 2-Funktor $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X} \colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ festgelegt wird. Hinsichtlich der superalgebraischen Hüllenstrukturen C und $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C$ sind die residuierten Abbildungen $\mathsf{j}_C \colon \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C \to C$ und $\mathsf{a}_C \colon C \to \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C$ selbst sowohl stetig als auch abgeschlossen, denn es gilt

$$\mathsf{j}_C \circ (\mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C) = \gamma_C \circ \mathsf{j}_C \quad \text{und} \quad \mathsf{a}_C \circ \gamma_C = (\mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C) \circ \mathsf{a}_C.$$

Folglich ist die Abbildung $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f$ für jedes $f \in \mathsf{ACS}(C,D)$ residuiert und stetig. Auch die Vollstetigkeit überträgt sich von f auf $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f$: Zunächst ist $\mathcal{S}\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C = \{\, \{u\} : u \in \mathcal{S}C \,\}$, und mit $\mathsf{j}_C(\{u\}) = u$ folgt

$$(\gamma_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}D} \circ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f)(\{u\}) = (\mathsf{a}_D \circ \gamma_D \circ f)(u) = (\mathsf{a}_D \circ f)(u) = \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f(\{u\})$$

für alle $u \in \mathcal{S}C$. Damit ist für alle $f \in \mathsf{ACS}(C,D)$, $g \in \mathsf{ACS}(D,E)$

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}(g \odot f) &= \overline{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}(g \odot f)} = \overline{\mathsf{a}_E \circ (g \odot f) \circ \mathsf{j}_C} = \overline{\mathsf{a}_E \circ \overline{g \circ f} \circ \mathsf{j}_C} \\ &= \overline{\mathsf{a}_E \circ g \circ f \circ \mathsf{j}_C} = \overline{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}g \circ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f} = \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}g \odot \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}i_C = i_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C}$, denn für jedes $u \in \mathcal{S}C$ ist

$$\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}i_C(\{u\}) = (\mathsf{a}_C \circ i_C)(u) = (\mathsf{a}_C \circ \gamma_C)(u) = \gamma_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C}(\{u\}) = i_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C}(\{u\}).$$

Schließlich ist jede der Abbildungen $f \mapsto \mathsf{a}_D \circ f \circ \mathsf{j}_C$ von $\mathsf{ACS}(C,D)$ in $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}(\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C, \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}D)$ isoton, insgesamt also $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}$ ein 2-Funktor.

Damit ist auch $\mathfrak{X} = \bar{\mathfrak{P}}^{-1} \circ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}$ als 2-Funktor nachgewiesen, den wir in der folgenden Definition nochmal festhalten.

Definition 7.2.10 (Hüllenraum-Spektrumsfunktor)**.** Der 2-Funktor $\mathfrak{X} \colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{CCRel}$ ist festgelegt durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(C) &= (\mathcal{S}C, \mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C) && \text{für } C \in |\mathsf{ACS}|, \\ \mathfrak{X}(f) &= f_{\rhd} = (\mathsf{a}_D \circ f \circ \mathsf{j}_C)_{\exists} && \text{für } f \in \mathsf{ACS}(C,D) \end{aligned}$$

und wird *Hüllenraum-Spektrumsfunktor* genannt.

Als nächstes beweisen wir, dass jede superalgebraische Hüllenstruktur C in ACS zur klassischen Hüllenstruktur $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C$ isomorph ist. Auf der Suche nach einem geeigneten Isomorphismus stehen uns zunächst die stetigen, residuierten Abbildungen $\mathsf{j}_C\colon \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C \to C$ und $\mathsf{a}_C\colon C \to \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C$ zur Verfügung. Diese besitzen in der Kategorie ACS^c jedoch im allgemeinen keine Inverse. Ihre vollstetigen Hüllen sind allerdings in ACS invertierbar: Für alle $u \in \mathcal{S}C$, d. h. $\{u\} \in \mathcal{S}\mathfrak{P}\mathcal{S}C$, gilt

$$\overline{\mathsf{a}_C \circ \mathsf{j}_C}(\{u\}) = ((\mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C) \circ \mathsf{a}_C \circ \mathsf{j}_C)(\{u\}) = (\mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C)(\{u\}) = i_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C}(\{u\}),$$

also einerseits

$$\overline{\mathsf{a}_C} \odot \overline{\mathsf{j}_C} = \overline{\mathsf{a}_C \circ \mathsf{j}_C} = i_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C}.$$

Andererseits ist

$$\overline{\mathsf{j}_C} \odot \overline{\mathsf{a}_C} = \overline{\mathsf{j}_C \circ \mathsf{a}_C} = \overline{\mathrm{id}_C} = i_C.$$

Somit sind $\overline{\mathsf{a}_C}$ und $\overline{\mathsf{j}_C}$ zueinander inverse ACS-Isomorphismen.

Darüber hinaus können wir feststellen, dass nach Definition des Funktors $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}$ für jedes $f \in \mathsf{ACS}(C, D)$ gilt:

$$\overline{\mathsf{a}_D} \odot f = \overline{\mathsf{a}_D \circ f} = \overline{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f \circ \mathsf{a}_C} = \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f \odot \overline{\mathsf{a}_C}$$

und

$$\overline{\mathsf{j}_D} \odot \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f = \overline{\mathsf{j}_D \circ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}f} = \overline{f \circ \mathsf{j}_C} = f \odot \overline{\mathsf{j}_C}.$$

Nun ist $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ eine volle Unterkategorie von ACS. Wegen $\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C = \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C$ für alle $C \in |\mathsf{ACS}|$ und $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C = \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}\mathfrak{I}C$ für alle $C \in |\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}|$ haben wir damit bereits gezeigt, dass durch

$$\bar{\mathsf{a}}_C := \overline{\mathsf{a}_C} \quad (C \in |\mathsf{ACS}|) \quad \text{und} \quad \bar{\mathsf{j}}_C := \overline{\mathsf{j}_C} \quad (C \in |\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}|)$$

natürliche Isomorphismen $\bar{\mathsf{a}}\colon 1_{\mathsf{ACS}} \Rightarrow \mathfrak{I} \circ \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}$ und $\bar{\mathsf{j}}\colon \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X} \circ \mathfrak{I} \Rightarrow 1_{\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}}$ festgelegt werden. Demnach sind $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{I}\colon \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}} \to \mathsf{ACS}$ Quantaloid-Äquivalenzen.

Wir zeigen abschließend, dass $(\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}, \mathfrak{I}, \bar{\mathsf{a}}, \bar{\mathsf{j}})$ eine Adjunktion ist. Die dafür benötigten Dreiecksgleichungen lauten

$$\bar{\mathsf{j}}_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C} \odot \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}\bar{\mathsf{a}}_C = i_C \quad (C \in |\mathsf{ACS}|), \qquad \mathfrak{I}\bar{\mathsf{j}}_C \odot \bar{\mathsf{a}}_{\mathfrak{I}C} = i_{\mathfrak{I}C} \quad (C \in |\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}|).$$

Nach Definition von $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}$ erhält man die erste Gleichung

$$\bar{\mathsf{j}}_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C} \odot \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}\bar{\mathsf{a}}_C = \overline{\overline{\mathsf{j}_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C}} \circ (\mathsf{a}_{\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C} \circ \overline{\mathsf{a}_C} \circ \mathsf{j}_C)} = \overline{\mathsf{j}_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C} \circ \mathsf{a}_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C} \circ \mathsf{a}_C \circ \mathsf{j}_C} = \overline{\mathsf{a}_C \circ \mathsf{j}_C} = i_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C},$$

und die zweite ist einfach die bereits bekannte Identität $\overline{\mathsf{j}_C} \odot \overline{\mathsf{a}_C} = i_C$.

Theorem 7.2.11. *Die Quantaloide* ACS *und* $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ *sind äquivalent,* $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ *ist eine volle, reflektive Unterkategorie von* ACS *und*

$$(\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}, \mathfrak{I}, \bar{\mathsf{a}}, \bar{\mathsf{j}})\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$$

eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. □

Korollar 7.2.12. *Die Quantaloide* ACS *und* CCRel *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\mathsf{a}}, 1_{\bar{\mathfrak{P}}^{-1}} * \bar{\mathsf{j}} * 1_{\bar{\mathfrak{P}}})\colon \mathsf{ACS} \to \mathsf{CCRel}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz.

Dabei ist $(1_{\bar{\mathfrak{P}}^{-1}} * \bar{\mathsf{j}} * 1_{\bar{\mathfrak{P}}})_X = \bar{\mathfrak{P}}^{-1}(\bar{\mathsf{j}}_{\bar{\mathfrak{P}}X}) = ((\mathsf{j}_{\bar{\mathfrak{P}}X})_\exists)^\Gamma$ *für jeden Hüllenraum* X*, und diese* CCRel*-Isomorphismen zwischen* $\mathfrak{X}\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}X$ *und* X *sind bestimmt durch*

$$(\{x\}, y) \in ((\mathsf{j}_{\bar{\mathfrak{P}}X})_\exists)^\Gamma \quad\iff\quad y \in \Gamma_X(\{x\}) \quad\iff\quad y \leq_X x,$$

denn es ist $(\mathsf{j}_{\bar{\mathfrak{P}}X})_\exists = \{\, (\{x\}, x) : x \in X \,\}$*.*

Beweis. Dies folgt mit Korollar 2.3.7 aus Theorem 7.2.11. □

7.3 Folgerungen für weitere Hüllenraum-Kategorien

In diesem Abschnitt zeigen wir nur einige von vielen möglichen Folgerungen aus den bisher bewiesenen Quantaloid-Äquivalenzen, die sich durch Restriktion oder leichte Modifikation der beteiligten Funktoren ergeben. Insbesondere beschränken wir uns dabei im wesentlichen auf Hüllenräume und vollständige Verbände, also auf Unterkategorien von CCRel und SL. Die im folgenden dargestellten kategoriellen Äquivalenzen für Hüllenräume lassen sich aber auch auf geeignete Hüllenstrukturen, also auf Unterkategorien von ACS bzw. $\mathsf{ACS}_{\mathfrak{P}}$ übertragen.

7.3.1 Adjungierte vollstetige Relationen

Da wir bisher überall konsequent die Ordnung auf den Morphismenmengen betrachtet, also mit lokal geordneten 2-Kategorien anstelle von gewöhnlichen Kategorien gearbeitet haben, können wir aus der Äquivalenz von CCRel und SL aus Theorem 7.2.5 mühelos schließen, dass die Hüllenraum-Kategorie $\mathrm{Adj}(\mathsf{CCRel})$ zur Kategorie $\mathsf{CL} = \mathrm{Adj}(\mathsf{SL})$ der vollständigen Verbände und *vollständigen Homomorphismen* äquivalent ist.

Vor diesem Hintergrund rekapitulieren wir speziell für das Quantaloid CCRel, wann ein Morphismus *adjungiert* ist: Eine vollstetige Relation $R : X \rightharpoondown Y$ zwischen Hüllenräumen ist genau dann adjungiert in CCRel, wenn es eine vollstetige Relation $S : Y \rightharpoondown X$ gibt mit $S \dashv R$, d. h. mit

$$S \odot R \subseteq i_X \quad \text{und} \quad i_Y \subseteq R \odot S.$$

Hierbei ist $S \odot R \subseteq i_X$ äquivalent zu $S \circ R \subseteq (\mathrm{id}_X)^\Gamma$, und $i_Y \subseteq R \odot S$ ist äquivalent zu $\mathrm{id}_Y \subseteq (R \circ S)^\Gamma$. Somit ist $S \dashv R$ in CCRel gleichbedeutend mit

$$(\forall x \in X)\big(x(S \circ R) \subseteq \overline{\{x\}}\big) \quad \text{und} \quad (\forall y \in Y)\big(y \in \overline{y(R \circ S)}\big).$$

Eine weitere Charakterisierung adjungierter vollstetiger Relationen liefert Lemma 5.2.40:

Lemma 7.3.1. *Eine vollstetige Relation* $R : X \rightharpoondown Y$ *ist genau dann adjungiert in* CCRel*, wenn für alle* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}X$

$$\overline{\left(\bigcap\{\, \overline{A} : A \in \mathcal{X} \,\}\right)R} = \bigcap\{\, \overline{AR} : A \in \mathcal{X} \,\}$$

erfüllt ist. □

Wie oben erwähnt, folgt aus Theorem 7.2.5 (mit Lemma 2.3.14 und einer geeigneten Restriktion der beteiligten 2-Funktoren) das zentrale Resultat für die lokal geordnete 2-Kategorie der *adjungierten vollstetigen Relationen*:

Korollar 7.3.2. *Die lokal geordneten* 2*-Kategorien* Adj(CCRel) *und* CL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \eta, \varepsilon)\colon \ \mathrm{Adj}(\mathsf{CCRel}) \to \mathsf{CL}$$

ist eine 2*-adjungierte* 2*-Äquivalenz.* □

Entsprechende Folgerungen für adjungierte Morphismen ergeben sich für alle bisher und im weiteren Verlauf untersuchten Äquivalenzen zwischen lokal geordneten 2-Kategorien, was wir jedoch nicht weiter ausführen. Analog zu adjungierten lassen sich natürlich auch *co-adjungierte* Morphismen betrachten.

7.3.2 Differenzierte Hüllenräume

Für jeden vollständigen Verband L ist der Schnittraum $\mathfrak{M}L$ differenziert (vergleiche auch Proposition 4.1.14). Eine Restriktion bzw. Co-Restriktion von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}$ auf das Quantaloid CCRel_0 der *differenzierten* Hüllenräume und vollstetigen Relationen liefert somit unmittelbar:

Korollar 7.3.3. *Die Quantaloide* CCRel_0 *und* SL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \eta, \varepsilon)\colon \mathsf{CCRel}_0 \to \mathsf{SL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. □

Alle bisher untersuchten Funktoren zwischen Hüllenraum- und Hüllenstruktur-Kategorien bewahren die Differenziertheit von Hüllenräumen bzw. Hüllenstrukturen.

Lemma 7.3.4. *Die Funktoren* $\bar{\mathfrak{P}}$, $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}$, $\mathfrak{I}$, $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}$ *und damit auch* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{I}\bar{\mathfrak{P}}$ *bewahren die Differenziertheit von Objekten.*

Beweis. Die Isomorphismen $\bar{\mathfrak{P}}$ und $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}$ erhalten die Differenziertheit laut der Definition differenzierter Hüllenräume, und der Inklusionsfunktor $\mathfrak{I}$ bewahrt sie trivialerweise.

Sei nun C eine differenzierte superalgebraische Hüllenstruktur, also $\gamma_C \restriction \mathcal{S}C$ injektiv. Die Abbildung $\mathsf{j}_C \restriction \mathcal{S}\mathfrak{P}\mathcal{S}C$ ist injektiv wegen $\mathsf{j}_C(\{u\}) = u$, und es gilt $\mathsf{j}_C[\mathcal{S}\mathfrak{P}\mathcal{S}C] \subseteq \mathcal{S}C$. Da auch a_C injektiv ist, folgt insgesamt die Injektivität von $\gamma_{\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C} = \mathsf{a}_C \circ \gamma_C \circ \mathsf{j}_C$, d. h. die klassische Hüllenstruktur $\bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{X}C$ ist differenziert. □

Für jeden vollständigen Verband L ist aufgrund der Differenziertheit des Hüllenraums $\mathfrak{M}L$ also auch $\mathfrak{K}L = \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{M}L$ differenziert. Insgesamt ergibt sich somit, dass sämtliche der bisher betrachteten Äquivalenzen gültig bleiben, wenn die Objektklassen der beteiligten Hüllenraum- bzw. Hüllenstruktur-Kategorien auf die differenzierten Objekte eingeschränkt werden. Dasselbe gilt auch für die im folgenden dargestellten Äquivalenzen.

7.3.3 Reduzierte Hüllenräume

Als nächstes schränken wir die Klasse der Hüllenräume auf die reduzierten ein. Dementsprechend werden statt beliebiger vollständiger Verbände nun die basierten betrachtet.

Notation 7.3.5 (Quantaloide für reduzierte Hüllenräume, basierte Verbände)**.** Es bezeichne CCRel_r das Quantaloid der *reduzierten* Hüllenräume und vollstetigen Relationen, und BL sei das Quantaloid der *basierten* vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen.

Ist X ein *reduzierter* Hüllenraum, so ist $\mathfrak{C}X$ ein *basierter* Verband, denn die Menge $\mathsf{p}[X] = \{\,\overline{\{x\}} : x \in X\,\}$ aller Punktabschlüsse ist in diesem Fall eine Basis (ein kleinster $\bigvee$-Erzeuger) von $\mathfrak{C}X$ (vergleiche Definition 6.1.4). Durch geeignete Restriktion des Hüllenverbandsfunktors $\mathfrak{C}$ erhalten wir also einen 2-Funktor

$$\mathfrak{C}^{\vee} \colon \mathsf{CCRel}_r \to \mathsf{BL}.$$

In der umgekehrten Richtung lässt sich der Schnittraumfunktor $\mathfrak{M}$ folgendermaßen zu einem 2-Funktor

$$\mathfrak{M}^{\vee} \colon \mathsf{BL} \to \mathsf{CCRel}_r$$

abändern: Für jeden basierten vollständigen Verband L wird zunächst durch

$$\Delta_L^{\vee}(A) := \Delta_L(A) \cap \mathcal{J}L = {\downarrow_L} \textstyle\bigvee_L A \cap \mathcal{J}L \qquad (A \subseteq \mathcal{J}L)$$

ein Hüllenoperator $\Delta_L^{\vee}$ auf der Basis $\mathcal{J}L$ definiert. Es lässt sich leicht zeigen, dass der Hüllenraum

$$\mathfrak{M}^{\vee}(L) := (\mathcal{J}L, \Delta_L^{\vee})$$

reduziert ist (und auch differenziert). Das System der abgeschlossenen Mengen von $\mathfrak{M}^{\vee}L$ ist offensichtlich

$$\mathcal{C}\mathfrak{M}^{\vee}L = \{\, {\downarrow_L} x \cap \mathcal{J}L : x \in L\,\}, \tag{7.3}$$

und die Spezialisierungsordnung von $\mathfrak{M}^{\vee}L$ ist $\leq_L \cap\, (\mathcal{J}L \times \mathcal{J}L)$. Sei nun $\varphi \colon L \to M$ eine residuierte Abbildung zwischen basierten vollständigen Verbänden. Wir legen die Relation $\mathfrak{M}^{\vee}(\varphi) : \mathfrak{M}^{\vee}L \rightharpoonup \mathfrak{M}^{\vee}M$ fest durch $\mathfrak{M}\varphi \cap (\mathcal{J}L \times \mathcal{J}M)$, also

$$(u,v) \in \mathfrak{M}^{\vee}(\varphi) \quad :\Longleftrightarrow \quad v \leq_M \varphi(u)$$

(vergleiche (7.1) auf Seite 202). Tatsächlich ist $\mathfrak{M}^{\vee}(\varphi)$ eine vollstetige Relation: Die Stetigkeit ergibt sich nach Korollar 6.2.16, da für jede abgeschlossene Menge ${\downarrow_M} y \cap \mathcal{J}M$ aus $\mathcal{C}\mathfrak{M}^{\vee}M$ auch

$$\begin{aligned}\{\, u \in \mathcal{J}L : u\mathfrak{M}^{\vee}\varphi \subseteq {\downarrow_M} y \cap \mathcal{J}M \,\} &= \{\, u \in \mathcal{J}L : (\forall v \in \mathcal{J}M)(v \leq_M \varphi(u) \Rightarrow v \leq_M y)\,\} \\ &= \{\, u \in \mathcal{J}L : \varphi(u) \leq_M y\,\} \\ &= {\downarrow_L} \varphi^*(y) \cap \mathcal{J}L\end{aligned}$$

eine abgeschlossene Menge aus $\mathcal{C}\mathfrak{M}^{\vee}L$ ist, und zusammen mit $u\mathfrak{M}^{\vee}\varphi = {\downarrow_M}\varphi(u) \cap \mathcal{J}M \in \mathcal{C}\mathfrak{M}^{\vee}M$ für alle $u \in \mathfrak{M}^{\vee}L$ folgt die Vollstetigkeit. Ohne Schwierigkeiten lassen sich auch die übrigen Eigenschaften beweisen, die $\mathfrak{M}^{\vee} \colon \mathsf{BL} \to \mathsf{CCRel}_r$ zu einem 2-Funktor machen.

Bemerkung 7.3.6. Den modifizierten Schnittraumfunktor $\mathfrak{M}^{\vee} \colon \mathsf{BL} \to \mathsf{CCRel}_r$ nennen wir in Anlehnung an die Terminologie aus [27] und [52] auch (*verallgemeinerten*) *Hüllen-Kern-Funktor.* Analog zu den Kern- und Hüllen-Abbildungen j_L bzw. a_L für superalgebraische Verbände L aus Definition 3.1.11 sieht man für jeden basierten Verband L, dass die *Kerne* $A \mapsto \bigvee_L A$ und die *Hüllen* $x \mapsto {\downarrow_L} x \cap \mathcal{J}L$ ein adjungiertes Paar zwischen $\mathfrak{P}\mathcal{J}L$ und L mit surjektiver erster Komponente induzieren (und somit die Komposition $\Delta_L^{\vee}(A) = {\downarrow_L} \bigvee_L A \cap \mathcal{J}L$ eine Hüllenoperation $\Delta_L^{\vee}$ auf $\mathfrak{P}\mathcal{J}L$ mit dem in (7.3) angegebenen Hüllenbereich ist).

$\mathfrak{M}^{\vee}L$ ähnelt einem Schnittraum: Für jeden $\bigwedge$-Erzeuger N von L lässt sich mit der Relation

$$R := \leq_L \cap\, (\mathcal{J}L \times N)$$

der Hüllenoperator $\Delta_L^{\vee}$ analog zu einem Schnittoperator als $\Delta_L^{\vee} = (R^{\mathrm{d}})^{\forall} \circ R^{\forall}$, also $\Delta_L^{\vee}(A) = A^R{}_R$ für alle $A \subseteq \mathcal{J}L$, schreiben.

Nach Definition ist für jeden reduzierten Hüllenraum X

$$\mathfrak{M}^\vee\mathfrak{C}^\vee X = (\mathcal{J}\mathfrak{C}X, \Delta^\vee_{\mathfrak{C}X}) = (\{\,\overline{\{x\}} : x \in X\,\}, \Delta^\vee_{\mathfrak{C}X}),$$

und man überzeugt sich leicht von der Stetigkeit der Punktabschluss-Abbildung

$$\mathsf{p}_X \colon X \to \mathfrak{M}^\vee\mathfrak{C}^\vee X.$$

Durch $\eta^\vee_X := (\mathsf{p}_X)^\Gamma$ erhalten wir somit eine vollstetige Relation zwischen X und $\mathfrak{M}^\vee\mathfrak{C}^\vee X$ mit

$$(x, \overline{\{y\}}) \in \eta^\vee_X \quad\Longleftrightarrow\quad y \leq_X x,$$

die außerdem in X natürlich ist. Man verifiziert auch problemlos, dass auf diese Weise ein natürlicher Isomorphismus $\eta^\vee \colon 1_{\mathsf{CCRel}_r} \Rightarrow \mathfrak{M}^\vee \circ \mathfrak{C}^\vee$ entsteht. Dabei ist die Inverse von $\eta^\vee_X$ bestimmt durch

$$(\overline{\{x\}}, y) \in (\eta^\vee_X)^{-1} \quad\Longleftrightarrow\quad y \leq_X x.$$

Für jeden basierten vollständigen Verband L ist

$$\mathfrak{C}^\vee\mathfrak{M}^\vee L = \mathfrak{C}(\mathcal{J}L, \Delta^\vee_L) = (\{\,{\downarrow_L} x \cap \mathcal{J}L : x \in L\,\}, \subseteq),$$

und mit den Ordnungsisomorphismen $\varepsilon^\vee_L \colon \mathfrak{C}^\vee\mathfrak{M}^\vee L \to L,\ A \mapsto \bigvee_L A$ bekommen wir einen natürlichen Isomorphismus $\varepsilon^\vee \colon \mathfrak{C}^\vee \circ \mathfrak{M}^\vee \Rightarrow 1_{\mathsf{BL}}$. Insgesamt können wir schließlich folgern:

Theorem 7.3.7. *Die Quantaloide* CCRel_r *und* BL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}^\vee, \mathfrak{M}^\vee, \eta^\vee, \varepsilon^\vee) \colon \mathsf{CCRel}_r \to \mathsf{BL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. □

Speziell untersuchen wir jetzt noch die *basiserhaltenden* Morphismen von BL, d. h. diejenigen Abbildungen $\varphi \colon L \to M$ zwischen basierten Verbänden, die $\varphi[\mathcal{J}L] \subseteq \mathcal{J}M$ erfüllen. Es stellt sich die Frage, welche Morphismen auf Seiten von CCRel_r über die obige Äquivalenz mit den basiserhaltenden, residuierten Abbildungen zwischen basierten Verbänden korrespondieren. Die Antwort liefert Proposition 6.2.34, derzufolge die induzierte Abbildung $\mathfrak{C}^\vee R = \mathfrak{C}R \colon \mathfrak{C}X \to \mathfrak{C}Y$ einer vollstetigen Relation $R : X \rightharpoondown Y$ zwischen reduzierten Hüllenräumen genau dann Basiselemente (d. h. Punktabschlüsse) bewahrt, wenn R *funktional* ist.

Notation 7.3.8 (2-Kategorien für reduzierte Hüllenräume, basierte Verbände)**.** Es bezeichne $\mathsf{CCRel}^\vee_r$ die lokal geordnete 2-Kategorie der *reduzierten* Hüllenräume und *funktionalen*, vollstetigen Relationen. $\mathsf{Clo}_{r,0}$ stehe für die lokal geordnete 2-Kategorie der *differenzierten*, *reduzierten* Hüllenräume und *stetigen Funktionen.*

$\mathsf{BL}^\vee$ sei die lokal geordnete 2-Kategorie der *basierten* vollständigen Verbände und *basiserhaltenden*, residuierten Abbildungen.

Durch Restriktion erhalten wir aus $\mathfrak{C}^\vee \colon \mathsf{CCRel}_r \to \mathsf{BL}$ einen 2-Funktor

$$\mathfrak{C}^\vee \colon \mathsf{CCRel}^\vee_r \to \mathsf{BL}^\vee.$$

Ist $\varphi \colon L \to M$ eine basiserhaltende, residuierte Abbildung zwischen basierten vollständigen Verbänden, so können wir die Restriktion $\varphi \restriction \mathcal{J}L \colon \mathfrak{M}^\vee L \to \mathfrak{M}^\vee M$ bilden, und diese erweist sich als stetig. Somit ist

$$\mathfrak{M}^\vee(\varphi) = (\varphi \restriction \mathcal{J}L)^\Gamma$$

eine *funktionale*, vollstetige Relation, und wir gelangen zum restringierten 2-Funktor

$$\mathfrak{M}^{\vee}\colon \mathsf{BL}^{\vee} \to \mathsf{CCRel}_r^{\vee}.$$

Für die oben definierten natürlichen Isomorphismen $\eta^{\vee}$ und $\varepsilon^{\vee}$ sieht man, dass $\eta_X^{\vee}$ funktional ist (wegen $\eta_X^{\vee} = (\mathsf{p}_X)^{\Gamma}$) und $\varepsilon_L^{\vee}$ basiserhaltend (wegen $\varepsilon_L^{\vee}(\downarrow_L u \cap \mathcal{J}L) = u$ für alle $u \in \mathcal{J}L$). Damit folgt aus Theorem 7.3.7:

Theorem 7.3.9. *Die lokal geordneten* 2*-Kategorien* $\mathsf{CCRel}_r^{\vee}$ *und* $\mathsf{BL}^{\vee}$ *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}^{\vee}, \mathfrak{M}^{\vee}, \eta^{\vee}, \varepsilon^{\vee})\colon \mathsf{CCRel}_r^{\vee} \to \mathsf{BL}^{\vee}$$

ist eine 2*-adjungierte* 2*-Äquivalenz.* □

Aus den früheren Überlegungen zu differenzierten Hüllenräumen ergibt sich als Korollar sofort, dass zu $\mathsf{BL}^{\vee}$ auch die lokal geordnete 2-Kategorie $\mathsf{CCRel}_{r,0}^{\vee}$ aller *differenzierten*, reduzierten Hüllenräume und funktionalen, vollstetigen Relationen äquivalent ist. Aus Theorem 7.1.17 wissen wir, dass $\mathsf{CCRel}_{r,0}^{\vee}$ zur lokal geordneten 2-Kategorie $\mathsf{Clo}_{r,0}$ der *differenzierten*, *reduzierten* Hüllenräume und *stetigen Funktionen* isomorph ist. Zusammen impliziert dies die folgende Äquivalenz für Hüllenräume und stetige Funktionen:

Korollar 7.3.10. *Die lokal geordneten* 2*-Kategorien* $\mathsf{Clo}_{r,0}$ *und* $\mathsf{BL}^{\vee}$ *sind äquivalent.* □

Bemerkung 7.3.11. Die im vorigen Korollar formulierte kategorielle Äquivalenz wurde bereits von Erné [27] in einem grundlegenden Artikel zu Hüllenraum-Kategorien und vollständigen Verbänden bewiesen. Erné gibt mit Hilfe sogenannter *invarianter Auswahlen* Σ, die jedem vollständigen Verband aus einer gegebenen Klasse von Verbänden einen $\bigvee$-Erzeuger $\Sigma(L)$ zuordnen, ein weitreichendes Theorem an, aus dem sich durch verschiedene Wahl von Σ zahlreiche kategorielle Äquivalenzen zwischen gewissen Hüllenraum-Kategorien und geeigneten Kategorien von vollständigen Verbänden gewinnen lassen. Die dabei betrachteten Hüllenräume X sind insbesondere differenziert (T_0-Räume), ihre Punktabschlüsse werden verbandstheoretisch durch

$$\Sigma(\mathfrak{C}X) = \{\, \overline{\{x\}} : x \in X \,\} \tag{7.4}$$

beschrieben, und als Morphismen zwischen Hüllenräumen werden *stetige Funktionen* verwendet; die betrachteten Morphismen zwischen den zugehörigen vollständigen Verbänden sind residuierte Abbildungen $\varphi\colon L \to M$ mit der Eigenschaft $\varphi[\Sigma(L)] \subseteq \Sigma(M)$. Setzt man in diesem – hier nur grob geschilderten – Rahmen $\Sigma = \mathcal{J}$, ordnet also jedem basierten vollständigen Verband L seine Basis $\mathcal{J}L$ zu, so ergibt sich gerade Korollar 7.3.10.

Umgekehrt sehen wir, dass durch die Verwendung von *vollstetigen Relationen* anstelle von stetigen Funktionen die Äquivalenz zwischen $\mathsf{Clo}_{r,0}$ und $\mathsf{BL}^{\vee}$ zu einer Äquivalenz zwischen CCRel_r und BL verallgemeinert werden kann (dies entspricht dem Weg von Korollar 7.3.10 zurück zu Theorem 7.3.7). Die Morphismen auf Seiten der basierten Verbände sind dann nicht mehr nur basiserhaltende, sondern *beliebige* residuierte Abbildungen. Das bedeutet mit $\Sigma = \mathcal{J}$, dass auf die Bedingung $\varphi[\Sigma(L)] \subseteq \Sigma(M)$ verzichtet wird. Außerdem ist in dieser Verallgemeinerung auf Seiten der Hüllenräume die Differenziertheit nicht mehr nötig.

Schwächt man die Voraussetzung (7.4) ab zu $\{\, \overline{\{x\}} : x \in X \,\} \subseteq \Sigma(\mathfrak{C}X)$ (was im Fall $\Sigma = \mathcal{J}$ keinen Unterschied macht), so erhält man auf dieselbe Weise auch für weitere Σ aus der jeweils bei Erné beschriebenen Äquivalenz eine Verallgemeinerung auf vollstetige Relationen und beliebige residuierte Abbildungen! Die bekannten Spezialfälle lassen sich dann, wie

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{CCRel}_A \arrow[dl, shift right, "\mathfrak{C}^\vee = \mathfrak{J}\mathfrak{A}\mathfrak{D}"'] \arrow[dr, shift left, "\mathfrak{Q}", "\cong"'] & \\
\mathsf{AL} \arrow[ur, shift right, "\mathfrak{M}^\vee = \mathfrak{D}\mathfrak{S}"'] \arrow[rr, shift right, "\mathfrak{S}"'] \arrow[dr, shift left, "\mathfrak{A}\mathfrak{S}"] & & \mathsf{ARel} \arrow[ul, shift left, "\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}^{-1}"] \arrow[ll, shift right, "\mathfrak{J}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\vee\mathfrak{D}"'] \arrow[dl, shift right, "\mathfrak{A}"', "\cong"] \\
 & \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}} \arrow[ul, shift left, "\mathcal{J}"] \arrow[ur, shift right, "\mathfrak{A}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 7.3: Quantaloid-Äquivalenzen für residuierte Hüllenräume

für $\Sigma = \mathcal{J}$ gezeigt, durch die Beschränkung auf differenzierte Hüllenräume mit (7.4) und funktionale, vollstetige Relationen zurückgewinnen.

Ist beispielsweise $\Sigma(L) = L$ für jeden vollständigen Verband L, dann ist die Verallgemeinerung auf vollstetige Relationen einfach die Äquivalenz von CCRel und SL aus Theorem 7.2.5. Für $\Sigma = \mathcal{S}$, wenn also jedem superalgebraischen Verband L sein $\bigvee$-Spektrum $\mathcal{S}L$ zugeordnet wird, ergibt sich als Verallgemeinerung die Äquivalenz der Quantaloide CCRel_A (residuierte Hüllenräume mit vollstetigen Relationen) und AL (superalgebraische Verbände und residuierte Abbildungen), die im folgenden noch etwas näher beschrieben wird.

7.3.4 Residuierte Hüllenräume

Die nächste Unterkategorie von CCRel, die wir untersuchen, ist das Quantaloid CCRel_A der A-Räume und vollstetigen Relationen. Hierbei können wir insbesondere einen Zusammenhang mit dem Quantaloid der Abschnittsrelationen aus Kapitel 3 herstellen, weil Abschnittsrelationen gerade vollstetige Relationen zwischen Abschnittsräumen sind. In diesem Rahmen werden wir neben der Notation $\mathfrak{D}P$ für Abschnittsräume auch $\mathfrak{Q}X$ (Spezialisierung) und $\mathfrak{A}P$ (Abschnittsverband) zu Isomorphismen zwischen geeigneten Quantaloiden ausbauen. Insgesamt klären wir die Beziehungen der in Abbildung 7.3 dargestellten 2-Funktoren.

Zur Erinnerung: AL ist das Quantaloid der superalgebraischen Verbände und residuierten Abbildungen (siehe Definition 3.1.17), und ARel bezeichnet das Quantaloid der quasigeordneten Mengen und Abschnittsrelationen (vergleiche Definition 3.2.5).

Definition 7.3.12 (Quantaloid der A-Räume und vollstetigen Relationen)**.** Es bezeichne CCRel_A diejenige volle Unterkategorie von CCRel, deren Objekte genau die residuierten Hüllenräume (d. h. die A-Räume) sind. Die Kategorie CCRel_A der A-Räume und vollstetigen Relationen ist somit ein Quantaloid.

Es wird sich gleich zeigen, dass die Quantaloide CCRel_A und ARel isomorph sind und sogar genau dieselben Morphismen besitzen. Damit ergibt sich insbesondere, dass die Komposition $\odot$ in CCRel_A einfach die gewöhnliche Komposition von Relationen ist! Die Identität auf X in CCRel_A ist wie üblich die duale Spezialisierungsordnung $i_X = \bar{\mathfrak{P}}^{-1}(\Gamma_X) = (\Gamma_X)_\exists = \geq_X$.

Bemerkung 7.3.13. Mit den abstrakten Grundbegriffen für Abbildungen zwischen Hüllenstrukturen können wir gut erklären, warum die Komposition $\odot$ von CCRel_A mit der gewöhnlichen Komposition $\circ$ identisch ist. Der Grund ist, dass für residuierte Abbildungen zwischen *residuierten* superalgebraischen Hüllenstrukturen die Eigenschaften *vollstetig* und *bindend* übereinstimmen (siehe Proposition 5.2.24) und die gewöhnliche Komposition bindender Abbildungen wieder bindend ist (siehe Proposition 4.2.23). Das überträgt sich via $R \mapsto R^\exists$ nach Korollar 3.3.15 auf vollstetige Relationen R zwischen residuierten Hüllenräumen.

In Theorem 6.2.45 wurde gezeigt, dass eine Abschnittsrelation zwischen quasigeordneten Mengen P und Q dasselbe ist wie eine vollstetige Relation zwischen den residuierten Abschnittsräumen $\mathfrak{D}P$ und $\mathfrak{D}Q$. Für beliebige Hüllenräume X und Y und eine vollstetige Relation $R : X \rightharpoondown Y$ ist nach Proposition 6.2.30 $R^\exists$ bindend bezüglich $\downarrow_X$ und $\downarrow_Y$, d. h. R ist vollstetig bezüglich $\mathfrak{D}\mathfrak{Q}X$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{Q}Y$ und somit eine Abschnittsrelation zwischen den Spezialisierungen $\mathfrak{Q}X$ und $\mathfrak{Q}Y$. Damit erhält man aus der Bildung der Spezialisierungsordnung bzw. des Abschnittsraums trivialerweise die folgenden beiden 2-Funktoren:

Definition 7.3.14 (Spezialisierungs- und Abschnittsraumfunktor)**.** Der *Spezialisierungsfunktor* $\mathfrak{Q}\colon \mathsf{CCRel}_A \to \mathsf{ARel}$ sei festgelegt durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(X) &= (|X|, \leq_X) && \text{für alle } X \in |\mathsf{CCRel}_A|, \\ \mathfrak{Q}(R) &= R && \text{für alle } R \in \mathsf{CCRel}_A(X,Y), \end{aligned}$$

und der *Abschnittsraumfunktor* $\mathfrak{D}\colon \mathsf{ARel} \to \mathsf{CCRel}_A$ durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(P) &= (|P|, \downarrow_P) && \text{für alle } P \in |\mathsf{ARel}|, \\ \mathfrak{D}(R) &= R && \text{für alle } R \in \mathsf{ARel}(P,Q). \end{aligned}$$

Für jede quasigeordnete Menge P ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{D}P = P$, und ist X ein *residuierter* Hüllenraum, so gilt auch $\mathfrak{D}\mathfrak{Q}X = X$ (siehe Korollar 6.1.16). Daraus ergibt sich sofort:

Theorem 7.3.15. *Die Quantaloide* CCRel_A *und* ARel *sind isomorph vermöge der zueinander inversen Quantaloid-Isomorphismen* $\mathfrak{Q}$ *und* $\mathfrak{D}$*. Die Isomorphismen sind konkret, induzieren auf den Morphismenmengen also die identische Abbildung.* $\square$

Wir wissen, dass der Potenzmengenverbandsfunktor $\mathfrak{P}\colon \mathsf{Rel} \to \mathsf{AL}_\mathfrak{P}$, der jeder Menge X den Potenzmengenverband $\mathfrak{P}X$ und jeder Relation $R : X \rightharpoondown Y$ zwischen Mengen die residuierte Funktion $R^\exists\colon \mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}Y$ zuordnet, ein Quantaloid-Isomorphismus ist. Hierzu führen wir nun das Analogon für Abschnittsverbände und Abschnittsrelationen ein.

Definition 7.3.16 (Inklusionsfunktor, Abschnittsverbandfunktor)**.** Es sei $\mathsf{AL}_\mathfrak{A}$ diejenige volle Unterkategorie von AL, deren Objekte gerade die Abschnittsverbände sind. Damit ist die Kategorie $\mathsf{AL}_\mathfrak{A}$ der Abschnittsverbände und residuierten Abbildungen ein Quantaloid. Der zugehörige Inklusionsfunktor wird im folgenden notiert als

$$\mathfrak{J}\colon \mathsf{AL}_\mathfrak{A} \to \mathsf{AL}.$$

$\mathfrak{A}\colon \mathsf{ARel} \to \mathsf{AL}_\mathfrak{A}$ sei der Funktor, der jeder quasigeordneten Menge P den Abschnittsverband $\mathfrak{A}P = (\mathcal{A}P, \subseteq)$ und jeder Abschnittsrelation $R : P \rightharpoondown Q$ die residuierte Abbildung

$$\mathfrak{A}R = \overrightarrow{R^\exists} = \downarrow_Q^\bullet \circ R^\exists \circ \downarrow_P^\circ$$

von $\mathfrak{A}P$ in $\mathfrak{A}Q$ zuordnet. Es gilt $(\mathfrak{A}R)(D) = R^\exists(D)$ für jeden unteren Abschnitt D, da R eine Abschnittsrelation ist.

Die bijektive Korrespondenz von Abschnittsrelationen zwischen quasigeordneten Mengen P und Q mit residuierten Abbildungen zwischen den Abschnittsverbänden $\mathfrak{A}P$ und $\mathfrak{A}Q$ wurde bereits in Bemerkung 3.2.6 und Korollar 6.2.47 erwähnt und kann mit den früheren Resultaten zu residuierten Abbildungen zwischen Hüllenverbänden leicht zu einem Quantaloid-Isomorphismus ausgebaut werden:

Theorem 7.3.17. *Die Quantaloide* ARel *und* $\mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}$ *sind isomorph, und der Abschnittsverbandfunktor* $\mathfrak{A}\colon \mathsf{ARel} \to \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}$ *ist ein Quantaloid-Isomorphismus. Der inverse Funktor* $\mathfrak{A}^{-1}$ *agiert auf den Morphismenmengen wie folgt: Für jedes residuierte* $\varphi \in \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}P, \mathfrak{A}Q)$ *ist* $\mathfrak{A}^{-1}(\varphi) = (\overleftarrow{\tilde{\varphi}})_{\exists} = (\overleftarrow{\varphi})_{\exists} = (\downarrow_Q^{\circ} \circ \varphi \circ \downarrow_P^{\bullet})_{\exists}$, *also*

$$(x, y) \in \mathfrak{A}^{-1}\varphi \quad \iff \quad y \in \varphi(\downarrow_P x).$$

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{A}\colon \mathsf{ARel} \to \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}$ ein Funktor wegen

$$\mathfrak{A}P = \mathfrak{C}(|P|, \downarrow_P) = \mathfrak{C}\mathfrak{D}P \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}R = \overrightarrow{R}^{\exists} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}R.$$

Offensichtlich ist $\mathfrak{A}$ bijektiv auf den Objekten. Nach Theorem 6.2.45 und Theorem 6.2.8 sind die induzierten Abbildungen $\mathfrak{A}_{P,Q}\colon \mathsf{ARel}(P, Q) \to \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}P, \mathfrak{A}Q)$ außerdem Ordnungsisomorphismen. Da $\downarrow_P$ und $\downarrow_Q$ residuierte Hüllenoperatoren sind, gilt schließlich $\overleftarrow{\tilde{\varphi}} = \overleftarrow{\varphi}$ für jedes $\varphi \in \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}P, \mathfrak{A}Q)$. □

Analog zu $\mathsf{Rel} \cong \mathsf{AL}_{\mathfrak{P}}$ (siehe Proposition 3.3.17) erhalten wir also $\mathsf{ARel} \cong \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}$, und wir haben bereits gesehen, dass $\mathsf{CCRel}_A \cong \mathsf{ARel}$ gilt. Nun kommen wir zur Äquivalenz von CCRel_A und AL.

In Bemerkung 7.3.11 wurde erläutert, dass sich mit demselben Vorgehen wie für die Äquivalenz $(\mathfrak{C}^{\vee}, \mathfrak{M}^{\vee}, \eta^{\vee}, \varepsilon^{\vee})\colon \mathsf{CCRel}_r \to \mathsf{BL}$ bei *reduzierten* Hüllenräumen und *basierten* Verbänden auch eine Quantaloid-Äquivalenz

$$(\mathfrak{C}^{\vee}, \mathfrak{M}^{\vee}, \eta^{\vee}, \varepsilon^{\vee})\colon \mathsf{CCRel}_A \to \mathsf{AL}$$

für *residuierte* Hüllenräume und *superalgebraische* Verbände zeigen lässt, indem statt der Basen $\mathcal{J}L$ basierter Verbände die Spektren $\mathcal{S}L$ superalgebraischer Verbände eingesetzt werden. Wir betrachten kurz, wie in diesem Fall die beteiligten Funktoren und natürlichen Transformationen aussehen.

Ist X ein residuierter Hüllenraum, so ist $\mathfrak{C}X$ ein superalgebraischer Verband (vergleiche Theorem 4.1.16 und Proposition 6.1.17). Durch geeignete Restriktion des Hüllenverbandsfunktors $\mathfrak{C}$ entsteht also der 2-Funktor $\mathfrak{C}^{\vee}\colon \mathsf{CCRel}_A \to \mathsf{AL}$. Es ist offensichtlich

$$\mathfrak{C}^{\vee} = \mathfrak{J} \circ \mathfrak{A} \circ \mathfrak{Q} = \mathfrak{J}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}.$$

Durch Komposition erhält man daraus den 2-Funktor $\mathfrak{J}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^{\vee}\mathfrak{D}\colon \mathsf{ARel} \to \mathsf{AL}$. In der umgekehrten Richtung kennen wir bereits aus Kapitel 3 den *Spektrumsfunktor*

$$\mathfrak{S}\colon \mathsf{AL} \to \mathsf{ARel},$$

der nach Theorem 3.2.22 eine Quantaloid-Äquivalenz ist (vergleiche auch Definition 3.2.11 für die induzierten Abschnittsrelationen $\mathfrak{S}\varphi = \varphi_{\rhd}$). Es sei außerdem an die Abbildungen

$$\mathsf{j}_L\colon \mathfrak{P}\mathcal{S}L \to L, \quad \mathsf{j}_L(A) = \textstyle\bigvee_L A \quad \text{und} \quad \mathsf{a}_L\colon L \to \mathfrak{P}\mathcal{S}L, \quad \mathsf{a}_L(x) = \downarrow_L x \cap \mathcal{S}L$$

sowie die aus ihnen abgeleiteten Abbildungen $\mathsf{j}_L^{\downarrow}\colon \mathfrak{A}\mathfrak{S}L \to L$ und $\mathsf{a}_L^{\downarrow}\colon L \to \mathfrak{A}\mathfrak{S}L$ aus Definition 3.1.11 erinnert. Für superalgebraische Verbände L sind diese vier Funktionen insbesondere residuiert.

Der Hüllen-Kern-Funktor $\mathfrak{M}^{\vee}\colon \mathsf{AL} \to \mathsf{CCRel}_A$ ist gegeben durch $\mathfrak{M}^{\vee}(L) = (\mathcal{S}L, \Delta_L^{\vee})$ für $L \in |\mathsf{AL}|$ und $\mathfrak{M}^{\vee}(\varphi) = \mathfrak{M}\varphi \cap (\mathcal{S}L \times \mathcal{S}M)$ für $\varphi \in \mathsf{AL}(L, M)$. Nach Lemma 3.1.12 ist

$$\Delta_L^{\vee} = \mathsf{a}_L \circ \mathsf{j}_L = \downarrow_{\mathfrak{S}L},$$

also $\mathfrak{M}^{\vee}L = (\mathcal{S}L, \downarrow_{\mathfrak{S}L}) = \mathfrak{D}\mathfrak{S}L$ ein residuierter (sowie reduzierter und differenzierter) Hüllenraum. Für jede residuierte Abbildung $\varphi\colon L \to M$ zwischen superalgebraischen Verbänden und alle $(u, v) \in \mathcal{S}L \times \mathcal{S}M$ gilt

$$(u, v) \in \mathfrak{M}^{\vee}\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad v \leq_M \varphi(u) \quad \Longleftrightarrow \quad (u, v) \in \varphi_{\triangleright}$$

und folglich $\mathfrak{M}^{\vee}\varphi = \varphi_{\triangleright} = \mathfrak{S}\varphi = \mathfrak{D}\mathfrak{S}\varphi$. Somit hat der Hüllen-Kern-Funktor für superalgebraische Verbände und residuierte Hüllenräume die Form

$$\mathfrak{M}^{\vee} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}.$$

Die induzierte Relation $\varphi_{\triangleright}$ ist eine Abschnittsrelation zwischen $\mathfrak{S}L$ und $\mathfrak{S}M$, d. h. eine vollstetige Relation zwischen $(\mathcal{S}L, \downarrow_{\mathfrak{S}L})$ und $(\mathcal{S}M, \downarrow_{\mathfrak{S}M})$. Für jedes $u \in \mathcal{S}L$ gilt außerdem $u\varphi_{\triangleright} = \downarrow_M \varphi(u) \cap \mathcal{S}M = (\mathsf{a}_M \circ \varphi \circ \mathsf{j}_L)(\{u\}) = (\mathsf{a}_M^{\downarrow} \circ \varphi \circ \mathsf{j}_L^{\downarrow})(\downarrow_{\mathfrak{S}L} u)$, die Relation $\varphi_{\triangleright}$ lässt sich also auch schreiben als

$$\mathfrak{M}^{\vee}\varphi = \mathfrak{D}\mathfrak{S}\varphi = \mathfrak{P}^{-1}(\mathsf{a}_M \circ \varphi \circ \mathsf{j}_L) = \overleftarrow{(\mathsf{a}_M^{\downarrow} \circ \varphi \circ \mathsf{j}_L^{\downarrow})}_{\exists} = \mathfrak{A}^{-1}(\mathsf{a}_M^{\downarrow} \circ \varphi \circ \mathsf{j}_L^{\downarrow}).$$

Den natürlichen Isomorphismus $\eta^{\vee}\colon 1_{\mathsf{CCRel}_A} \Rightarrow \mathfrak{M}^{\vee} \circ \mathfrak{C}^{\vee}$ erhält man durch

$$(x, \downarrow_X y) \in \eta_X^{\vee} \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq_X x \quad \Longleftrightarrow \quad (\downarrow_X x, y) \in (\eta_X^{\vee})^{-1}.$$

Wegen $\mathfrak{C}^{\vee}\mathfrak{M}^{\vee}L = \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{S}L = \mathfrak{A}\mathfrak{S}L$ für alle superalgebraischen Verbände L sind die Komponenten von $\varepsilon^{\vee}\colon \mathfrak{C}^{\vee} \circ \mathfrak{M}^{\vee} \Rightarrow 1_{\mathsf{AL}}$ gegeben durch die Ordnungsisomorphismen $\varepsilon_L^{\vee} = \mathsf{j}_L^{\downarrow}$ mit der Inversen $(\varepsilon_L^{\vee})^{-1} = \mathsf{a}_L^{\downarrow}$ (vergleiche auch Theorem 3.1.13).

Für diese Funktoren und natürlichen Transformationen sieht man nun genauso wie im Fall von reduzierten Hüllenräumen:

Theorem 7.3.18. *Die Quantaloide* CCRel_A *und* AL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}^{\vee}, \mathfrak{M}^{\vee}, \eta^{\vee}, \varepsilon^{\vee})\colon \mathsf{CCRel}_A \to \mathsf{AL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. □

Es ist $\mathfrak{J}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^{\vee} \circ \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{D}\mathfrak{S} = \mathfrak{D}^{-1} \circ \mathfrak{D}\mathfrak{S}$. Aus Theorem 7.3.18 folgt mit Korollar 2.3.7 somit auch die folgende adjungierte Äquivalenz zwischen ARel und AL.

Korollar 7.3.19. *Die Quantaloide* ARel *und* AL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{A}, \mathfrak{S}, 1_{\mathfrak{Q}} * \eta^{\vee} * 1_{\mathfrak{D}}, \varepsilon^{\vee})\colon \mathsf{ARel} \to \mathsf{AL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz.

Dabei ist $(1_{\mathfrak{Q}} * \eta^{\vee} * 1_{\mathfrak{D}})_P = \mathfrak{Q}(\eta_{\mathfrak{D}P}^{\vee}) = \eta_{\mathfrak{D}P}^{\vee}$ *für jede quasigeordnete Menge* P. □

Hieraus ergibt sich erneut die früher in Theorem 3.2.22 gezeigte Quantaloid-Äquivalenz $\mathfrak{S}\colon \mathsf{AL} \to \mathsf{ARel}$. Im Beweis von Theorem 3.2.22 wird auch schon die oben erwähnte, in ARel invertierbare Abschnittsrelation $\eta^{\vee}_{\mathfrak{D}P} : P \rightharpoonup \mathfrak{S}\mathfrak{A}P$ mit $(x, {\downarrow_P} y) \in \eta^{\vee}_{\mathfrak{D}P} \Leftrightarrow y \leq_P x$ verwendet.

Korollar 7.3.20. *Die Quantaloide* $\mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}$ *und* AL *sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{J}, \mathfrak{A}\mathfrak{S}, 1_{\mathfrak{A}} * 1_{\mathfrak{O}} * \eta^{\vee} * 1_{\mathfrak{D}} * 1_{\mathfrak{A}^{-1}}, \varepsilon^{\vee})\colon \mathsf{AL}_{\mathfrak{A}} \to \mathsf{AL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. Damit ist insbesondere $\mathsf{AL}_{\mathfrak{A}}$ *eine volle reflektive Unterkategorie von* AL.

Es ist $(1_{\mathfrak{A}} * 1_{\mathfrak{O}} * \eta^{\vee} * 1_{\mathfrak{D}} * 1_{\mathfrak{A}^{-1}})_{\mathfrak{A}P} = \mathfrak{A}(\eta^{\vee}_{\mathfrak{D}P})$ *für jede quasigeordnete Menge* P. □

Damit sind nun alle in Abbildung 7.3 auf Seite 216 dargestellten Äquivalenzen für residuierte Hüllenräume gezeigt.

Genau wie für reduzierte Hüllenräume in Korollar 7.3.10 folgt auch hier der Spezialfall für *differenzierte*, residuierte Hüllenräume und *funktionale*, vollstetige Relationen sowie superalgebraische Verbände und *spektrumserhaltende*, residuierte Abbildungen. Bezeichnet $\mathsf{Clo}_{A,0}$ (bzw. $\mathsf{CCRel}^{\vee}_{A,0}$) die lokal geordnete 2-Kategorie der differenzierten A-Räume und stetigen Funktionen (bzw. funktionalen, vollstetigen Relationen), so ist $\mathsf{Clo}_{A,0}$ äquivalent zur lokal geordneten 2-Kategorie $\mathsf{AL}^{\vee}$ der superalgebraischen Verbände und spektrumserhaltenden, residuierten Abbildungen.

Es gilt $\mathsf{CCRel}^{\vee}_{A,0} \cong \mathsf{Clo}_{A,0}$, und analog ist bereits nach Theorem 3.2.25 die lokal geordnete 2-Kategorie $\mathsf{ARel}^{\vee}_0$ der geordneten Mengen und funktionalen (d. h. co-adjungierten) Abschnittsrelationen isomorph zu Pos, der lokal geordneten 2-Kategorie der geordnete Mengen und isotonen Abbildungen. Da die Spezialisierungen differenzierter A-Räume gerade geordnete Mengen und die stetigen Funktionen in diesem Fall mit den isotonen identisch sind (vergleiche Korollar 6.2.14), sind auch $\mathsf{Clo}_{A,0}$ und $\mathsf{ARel}^{\vee}_0$ isomorph. Daraus folgt das bekannte Resultat

$$\mathsf{Clo}_{A,0} \cong \mathsf{Pos}$$

und somit ein weiteres mal die klassische Äquivalenz von $\mathsf{AL}^{\vee}$ und Pos aus Theorem 3.2.18.

7.3.5 Formale Kontexte

Wir betrachten abschließend, wie sich die Resultate für Hüllenraum-Kategorien auf geeignete Kontext-Kategorien ausdehnen lassen. Jeder formale Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ induziert einen Hüllenraum $\mathbb{K}_+ = (G, \Gamma_{\mathbb{K}_+})$ mit $\Gamma_{\mathbb{K}_+}(A) = A^{I}{}_{I}$ für alle $A \subseteq G$. Mit vollstetigen Relationen $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoonup \mathbb{L}_+$ als Morphismen zwischen Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ wird die Quantaloid-Struktur von CCRel somit auf die Klasse der Kontexte übertragen.

Notation 7.3.21 (Quantaloid der Kontexte und vollstetigen Relationen)**.** Es sei CCRel_K das Quantaloid aller Kontexte und vollstetigen Relationen (mit der Komposition $\odot$ und den Identitäten $i_{\mathbb{K}}$).

In Theorem 6.3.3 wurden bereits verschiedene Charakterisierungen von vollstetigen Relationen zwischen Kontexten angegeben. Die Identität auf einem Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ in CCRel_K ist $i_{\mathbb{K}} = i_{\mathbb{K}_+} = \geq_{\mathbb{K}_+}$, also die duale Spezialisierungsordnung von $\mathbb{K}_+$. Sie hat die Form

$$i_{\mathbb{K}} = (I \to I)^{\mathrm{d}},$$

denn nach Beispiel 2.3.26 gilt für alle $g, h \in G$

$$g \leq_{\mathbb{K}_+} h \iff g \in {h^I}_I \iff h^I \subseteq g^I \iff (g,h) \in I \to I$$

und somit $\leq_{\mathbb{K}_+} = I \to I$ (vergleiche Lemma 2.3.31). Dual sieht man $\leq_{\mathbb{K}_-} = (I \leftarrow I)^{\mathrm{d}}$.

Der Hüllenverbandsfunktor $\mathfrak{C}\colon \mathsf{CCRel} \to \mathsf{SL}$ kann nun zu einem 2-Funktor

$$\mathfrak{C}^+\colon \mathsf{CCRel}_K \to \mathsf{SL}$$

abgeändert werden, indem man jedem Kontext $\mathbb{K}$ seinen Umfangsverband $\mathfrak{C}^+\mathbb{K} := \mathfrak{C}\mathbb{K}_+$ zuordnet (für die Morphismen ändert sich nichts). Auch aus $\mathfrak{M}\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{CCRel}$, dem Schnittraumfunktor, erhält man leicht einen geeigneten 2-Funktor

$$\mathfrak{M}^+\colon \mathsf{SL} \to \mathsf{CCRel}_K,$$

indem jedem vollständigen Verband L der Kontext $\mathfrak{M}^+(L) := (|L|, |L|, \leq_L)$ zugewiesen wird. Es ist dann $(\mathfrak{M}^+L)_+ = (|L|, (\,\cdot\,)^{\leq_L}{}_{\leq_L}) = (|L|, \Delta_L) = \mathfrak{M}L$, und $\mathfrak{M}^+$ agiert auf den Morphismenmengen genau wie $\mathfrak{M}$.

Die natürlichen Isomorphismen $\eta\colon 1_{\mathsf{CCRel}} \Rightarrow \mathfrak{M} \circ \mathfrak{C}$ und $\varepsilon\colon \mathfrak{C} \circ \mathfrak{M} \Rightarrow 1_{\mathsf{SL}}$ lassen sich hiernach offensichtlich auch auffassen als

$$\eta\colon 1_{\mathsf{CCRel}_K} \Rightarrow \mathfrak{M}^+ \circ \mathfrak{C}^+ \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon\colon \mathfrak{C}^+ \circ \mathfrak{M}^+ \Rightarrow 1_{\mathsf{SL}}$$

(es ist $\mathfrak{C}^+ \circ \mathfrak{M}^+ = \mathfrak{C} \circ \mathfrak{M}$ und $((\mathfrak{M}^+ \circ \mathfrak{C}^+)(\mathbb{K}))_+ = (\mathfrak{M} \circ \mathfrak{C})(\mathbb{K}_+)$ für jeden Kontext $\mathbb{K}$). Somit überträgt sich die Quantaloid-Äquivalenz aus Theorem 7.2.5 von Hüllenräumen auf Kontexte, und es gilt:

Theorem 7.3.22. *Die Quantaloide CCRel_K und SL sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}^+, \mathfrak{M}^+, \eta, \varepsilon)\colon \mathsf{CCRel}_K \to \mathsf{SL}$$

ist eine adjungierte Quantaloid-Äquivalenz. □

Durch die Einschränkung auf adjungierte Morphismen erhalten wir sofort die nächste Folgerung für die Kategorie der vollständigen Verbände und vollständigen Homomorphismen.

Korollar 7.3.23. *Die lokal geordneten 2-Kategorien $\mathrm{Adj}(\mathsf{CCRel}_K)$ und CL sind äquivalent, und*

$$(\mathfrak{C}^+, \mathfrak{M}^+, \eta, \varepsilon)\colon \mathrm{Adj}(\mathsf{CCRel}_K) \to \mathsf{CL}$$

ist eine 2-adjungierte 2-Äquivalenz. □

Anstelle adjungierter vollstetiger Relationen $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_+$ als $\mathrm{Adj}(\mathsf{CCRel}_K)$-Morphismen zwischen Kontexten $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{L} = (H, N, J)$ können natürlich auch adjungierte Paare (R, S) vollstetiger Relationen $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_+$ und $S : \mathbb{L}_+ \rightharpoondown \mathbb{K}_+$ verwendet werden (R und S sind eindeutig durcheinander bestimmt). Aus Platzgründen verzichten wir auf eine nähere Untersuchung dieser Kontext-Morphismen. Es sei allerdings erwähnt, dass sich die Adjungiertheit einer vollstetigen Relation $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_+$ zwischen den Gegenstandsmengen äquivalent durch die Existenz einer (eindeutig bestimmten) vollstetigen Relation $T : \mathbb{L}_- \rightharpoondown \mathbb{K}_-$ zwischen den Merkmalsmengen beschreiben lässt, so dass das Paar (R, T) *begriffserhaltend* ist, d. h. für alle (A, B) gilt:

$$(A, B) \in \mathfrak{B}\mathbb{K} \implies (\overrightarrow{R^{\exists}}(A), \overrightarrow{T^{\exists}}(B)) = ((BT)_J, (AR)^J) \in \mathfrak{B}\mathbb{L}.$$

Wie im Falle der Stetigkeit und Vollstetigkeit (siehe Theorem 6.3.3) kann auch diese Bedingung (und damit die Adjungiertheit von R in CCRel_K) übersichtlich mit den Residualen der Relationen-Komposition ausgedrückt werden:

$$I \subseteq T \to (J \leftarrow R^{\mathrm{d}}) \quad \text{und} \quad (J \leftarrow R^{\mathrm{d}}) \leftarrow ((T \to J) \to I) \subseteq J. \tag{7.5}$$

Auf diese Weise erhält man statt adjungierter Paare (R, S) vollstetiger Relationen also begriffserhaltende Paare (R, T) vollstetiger Relationen, und diese Morphismen können durch komponentenweise Komposition mit $\odot$ verknüpft werden.

Bemerkung 7.3.24. Wir nennen einen Kontext $\mathbb{K}$ *differenziert*, falls die Hüllenräume $\mathbb{K}_+$ und $\mathbb{K}_-$ differenziert sind (in der Formalen Begriffsanalyse heißt $\mathbb{K}$ in diesem Fall *bereinigt*). Analog verstehen wir unter einem *reduzierten* Kontext $\mathbb{K}$ einen solchen, für den $\mathbb{K}_+$ und $\mathbb{K}_-$ reduziert sind. Es sei hier nur kurz erwähnt, dass sich die in Theorem 7.3.7 und Theorem 7.3.9 bewiesenen Äquivalenzen für reduzierte Hüllenräume problemlos auf reduzierte Kontexte übertragen lassen, wobei die zugehörige Klasse vollständiger Verbände dann auf die *doppelt basierten* Verbände, d. h. solche mit einer $\bigvee$- und einer $\bigwedge$-Basis, beschränkt wird. Für differenzierte Kontexte erhält man ein Analogon zu Korollar 7.3.3.

Erné [35] untersucht eine Vielzahl von Kontext-Kategorien und zeigt kategorielle Adjunktionen oder sogar Äquivalenzen mit gewissen Kategorien von vollständigen Verbänden, insbesondere solchen mit vollständigen Homomorphismen (vergleiche auch [32]). Die Morphismen zwischen Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ bestehen bei Erné aus Paaren *stetiger Funktionen* $\alpha\colon \mathbb{K}_+ \to \mathbb{L}_+$ und $\beta\colon \mathbb{K}_- \to \mathbb{L}_-$, die geeignete weitere Eigenschaften erfüllen. Insbesondere heißt ein Paar (α, β) *begriffserhaltend*, falls

$$(A, B) \in \mathfrak{B}\mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad (\beta[B]_J, \alpha[A]^J) \in \mathfrak{B}\mathbb{L}$$

gilt, und ein begriffserhaltendes Paar (α, β) stetiger Abbildungen wird dann *begrifflich* genannt. Diese begrifflichen Morphismen korrespondieren nun (im Falle differenzierter Kontexte) über die vollstetige Hülle $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha^\Gamma, \beta^\Gamma)$ genau mit den oben beschriebenen begriffserhaltenden Paaren (R, T) vollstetiger Relationen, für die R und T *funktional* sind! Die bei Erné für begriffliche Paare gezeigten kategoriellen Äquivalenzen ergeben sich damit als geeignete Spezialfälle aus Theorem 7.3.22, indem beispielsweise differenzierte, reduzierte Kontexte zusammen mit begriffserhaltenden Paaren funktionaler, vollstetiger Relationen betrachtet werden. Analog lassen sich die sogenannten *begriffsstetigen* Paare bei Erné von Funktionen auf Relationen zwischen Kontexten verallgemeinern. Diese entsprechen dann gewissen *coadjungierten* vollstetigen Relationen.

Die Bedingung (7.5) für Morphismen der Form (R, T) zwischen Kontexten wurde vor kurzem erneut entdeckt in [48], allerdings in einer elementweisen (und redundanten) Beschreibung.

In engem Zusammenhang mit begriffserhaltenden Paaren (R, T) vollstetiger Relationen stehen auch die von Hartung [51] angegebenen Morphismen zwischen *topologischen* Kontexten.

Es seien weiterhin $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{L} = (H, N, J)$ Kontexte. In Proposition 6.3.8 hatten wir gesehen, dass die vollstetigen Relationen zwischen $\mathbb{K}_+$ und $\mathbb{L}_+$ in bijektiver Korrespondenz mit den Bindungen zwischen $\mathbb{K}_+$ und $\mathbb{L}_-$ stehen, wobei die zueinander inversen Bijektionen durch

$$R \mapsto R^\partial = J \leftarrow R^{\mathrm{d}} \quad \text{und} \quad S \mapsto S_\partial = (S \to J)^{\mathrm{d}}$$

gegeben waren. Dies legt nahe, auch Bindungen als Morphismen zwischen Kontexten zu betrachten, und tatsächlich lässt sich hierfür eine geeignete Komposition festlegen.

Wir nennen eine Relation eine *Bindung zwischen* $\mathbb{K}$ *und* $\mathbb{L}$, falls sie eine Bindung zwischen $\mathbb{K}_+$ und $\mathbb{L}_-$ ist. Für $i \in \{1,2,3\}$ seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ Kontexte. Ist S_1 eine Bindung zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ und S_2 eine Bindung zwischen $\mathbb{K}_2$ und $\mathbb{K}_3$, so erhält man eine Bindung $S_2 \diamond S_1$ zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_3$ durch

$$(g,m) \in S_2 \diamond S_1 \quad :\Longleftrightarrow \quad m \in {g^{S_1}}_{I_2}{}^{S_2}.$$

Es ist $S_2 \diamond S_1 = S_2 \leftarrow (S_1 \to I_2) = (I_2 \leftarrow S_2) \to S_1$, und man prüft leicht nach, dass für $\diamond$ die Assoziativität gilt. Die Rolle von Identitäten bezüglich $\diamond$ übernehmen die Inzidenzrelationen der Kontexte: Sie sind stets Bindungen, und für jede Bindung S zwischen $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ gilt $J \diamond S = S = S \diamond I$.

Notation 7.3.25 (Kategorie der Kontexte und Bindungen)**.** Bond_K sei die Kategorie der Kontexte und Bindungen (mit der Komposition $\diamond$ und den Identitäten $1_{\mathbb{K}} = I$ für $\mathbb{K} = (G,M,I) \in |\mathsf{Bond}_K|$).

Es lässt sich zeigen, dass der oben erwähnte Zusammenhang von vollstetigen Relationen und Bindungen zwischen Kontexten bezüglich der zugehörigen Kompositionen funktoriell ist.

Lemma 7.3.26. *Die Bijektionen $R \mapsto R^\partial$ und $S \mapsto S_\partial$ sind funktoriell: Für alle vollstetigen Relationen $R_1 : (\mathbb{K}_1)_+ \rightharpoondown (\mathbb{K}_2)_+$ und $R_2 : (\mathbb{K}_2)_+ \rightharpoondown (\mathbb{K}_3)_+$ ist*

$$(R_2 \odot R_1)^\partial = (R_2)^\partial \diamond (R_1)^\partial$$

und $(i_{\mathbb{K}})^\partial = I = 1_{\mathbb{K}}$; für alle Bindungen $S_1 : (\mathbb{K}_1)_+ \rightharpoondown (\mathbb{K}_2)_-$ und $S_2 : (\mathbb{K}_2)_+ \rightharpoondown (\mathbb{K}_3)_-$ gilt

$$(S_2 \diamond S_1)_\partial = (S_2)_\partial \odot (S_1)_\partial,$$

und $(1_{\mathbb{K}})_\partial = I_\partial = i_{\mathbb{K}}$. □

Die Kategorie Bond_K der Bindungen ist hinsichtlich der Mengeninklusion eine lokal geordnete 2-Kategorie. Betrachtet man $(\mathsf{Bond}_K)^{\mathrm{co}}$, also die duale Ordnung auf den Morphismenmengen, so erhält man sogar ein Quantaloid, welches zu CCRel_K isomorph ist.

Theorem 7.3.27. *Die Abbildungen $R \mapsto R^\partial$ und $S \mapsto S_\partial$ induzieren zwei zueinander inverse Isomorphismen zwischen den Quantaloiden CCRel_K und $(\mathsf{Bond}_K)^{\mathrm{co}}$.* □

Damit erweisen sich Bindungen ebenso wie vollstetige Relationen als kanonische Morphismen zwischen Kontexten. Analog zu den oben beschriebenen begriffserhaltenden (bzw. adjungierten) Paaren vollstetiger Relationen können über den Isomorphismus von CCRel_K in $(\mathsf{Bond}_K)^{\mathrm{co}}$ natürlich auch begriffserhaltende (bzw. adjungierte) Paare von Bindungen als Kontext-Morphismen eingeführt werden.

Bemerkung 7.3.28. Die Komposition $\diamond$ von Bindungen wurde (in anderer Notation) bereits von Ganter und Wille [44] angegeben, siehe auch [43].

Auf elegante Weise werden Bindungen mit dieser Komposition und außerdem gewisse Bindungspaare, die co-adjungierten Paaren in Bond_K entsprechen, bei Kent [59] behandelt (wobei Bindungen von $\mathbb{K}$ in $\mathbb{L}$ dort als Bindungen zwischen $\mathbb{L}_-$ und $\mathbb{K}_+$ aufgefasst werden). Kent zeigt die Äquivalenz einer entsprechenden Kontext-Kategorie mit der Kategorie CL der vollständigen Verbände und vollständigen Homomorphismen und gibt zudem einen Zusammenhang von Bindungen und relationalen Infomorphismen an, vergleiche Bemerkung 6.3.4.

Der Zusammenhang von Bindungen und vollstetigen Relationen (in der Form von Chu-Korrespondenzen) zwischen Kontexten wird ausführlich von Mori [70] untersucht. Weiteres Material zu Morphismen zwischen Kontexten (insbesondere zu dualen Bindungen) findet sich in [60].

Schließlich gibt auch Gehrke [45] (vgl. [22]) als Morphismen zwischen differenzierten und reduzierten Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ gewisse Paare von Relationen (R, S) an, die sich als begriffserhaltende Paare von Bindungen $R : \mathbb{K}_+ \rightharpoondown \mathbb{L}_-$ und $S : \mathbb{K}_- \rightharpoondown \mathbb{L}_+$ in die allgemeine Theorie einordnen lassen, die wir in dieser Arbeit entwickelt haben.

Literaturverzeichnis

[1] Adámek, Jiří ; Herrlich, Horst ; Strecker, George E.: *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats.* Dover Publications, 2009. – URL http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/

[2] Banaschewski, Bernhard ; Nelson, Evelyn: Tensor products and bimorphisms. In: *Canadian Mathematical Bulletin* 19 (1976), Nr. 4, S. 385–402

[3] Barwise, Jon ; Seligman, Jerry: *Information Flow. The Logic of Distributed Systems.* Cambridge University Press, 1997 (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 44)

[4] Bénabou, Jean: Introduction to bicategories. In: *Reports of the Midwest Category Seminar* Bd. 47. Berlin : Springer, 1967, Kap. 1, S. 1–77

[5] Berge, Claude: *Topological Spaces. Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces and Convexity.* Mineola, NY : Dover Publications, 1997. – Reprint of the 1963 translation

[6] Bimbó, Katalin ; Dunn, J. M.: *Generalized Galois Logics. Relational Semantics of Nonclassical Logical Calculi.* Stanford : CSLI Publications, 2008 (CSLI Lecture Notes 188)

[7] Birkhoff, Garrett: *Lattice Theory.* Dritte (neue) Auflage. American Mathematical Society, 1967 (Colloquium Publications 25)

[8] Blackburn, Patrick ; Rijke, Maarten de ; Venema, Yde: *Modal Logic.* Cambridge University Press, 2002 (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 53)

[9] Bloom, Stephen L.: Varieties of ordered algebras. In: *Journal of Computer and System Sciences* 13 (1976), Oktober, Nr. 2, S. 200–212

[10] Blyth, T. S.: Residuated Mappings. In: *Order* 1 (1984), Juni, Nr. 2, S. 187–204

[11] Blyth, T. S. ; Janowitz, M. F.: *Residuation Theory.* Oxford : Pergamon Press, 1972 (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics 102)

[12] Borceux, Francis: *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 1994 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50)

[13] Borceux, Francis: *Handbook of Categorical Algebra 2. Categories and Structures.* Cambridge University Press, 1994 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51)

[14] Borceux, Francis ; Stubbe, Isar: Short introduction to enriched categories. In: *Current research in operational quantum logic.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000 (Fund. Theories Phys. 111), S. 167–194

[15] Carboni, Aurelio ; Street, Ross: Order ideals in categories. In: *Pacific Journal of Mathematics* 124 (1986), Nr. 2, S. 275–288

[16] Celani, S. ; Jansana, R.: A New Semantics for Positive Modal Logic. In: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 38 (1997), Nr. 1, S. 1–18

[17] Davey, B. A. ; Priestley, H. A.: *Introduction to Lattices and Order.* Zweite Auflage. Cambridge University Press, 2002

[18] Denecke, K. (Hrsg.) ; Erné, M[arcel] (Hrsg.) ; Wismath, S. L. (Hrsg.): *Galois Connections and Applications.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2004 (Mathematics and Its Applications 565)

[19] Domenach, Florent ; Leclerc, Bruno: Biclosed Binary Relations and Galois Connections. In: *Order* 18 (2001), Nr. 1, S. 89–104

[20] Dunn, J. M.: Gaggle theory: an abstraction of Galois connections and residuation, with applications to negation, implication, and various logical operators. In: Eijck, Jan van (Hrsg.): *Logics in AI (Amsterdam, 1990).* Berlin : Springer, 1991 (Lecture Notes in Computer Science 478), S. 31–51

[21] Dunn, J. M.: Partial Gaggles Applied to Logics with Restricted Structural Rules. In: [84], S. 63–108

[22] Dunn, J. M. ; Gehrke, Mai ; Palmigiano, Alessandra: Canonical extensions and relational completeness of some substructural logics. In: *The Journal of Symbolic Logic* 70 (2005), September, Nr. 3, S. 713–740

[23] Dunn, J. M. ; Hardegree, Gary M.: *Algebraic Methods in Philosophical Logic.* Oxford : Clarendon Press, 2001 (Oxford Logic Guides 41)

[24] Erné, Marcel: Verallgemeinerungen der Verbandstheorie I: Halbgeordnete Mengen und das Prinzip der Vervollständigungs-Invarianz / Institut für Mathematik, Technische Universität Hannover. 1980. – Preprint

[25] Erné, Marcel: Scott convergence and Scott topology in partially ordered sets II. In: Banaschewski, Bernhard (Hrsg.) ; Hoffmann, Rudolf-Eberhard (Hrsg.): *Continuous Lattices (Bremen, 1979)*, Springer Berlin, 1981 (Lecture Notes in Mathematics 871), S. 61–96

[26] Erné, Marcel: *Einführung in die Ordnungstheorie.* Mannheim : Bibliographisches Institut, 1982

[27] Erné, Marcel: Lattice representations for categories of closure spaces. In: *Categorical Topology (Toledo, Ohio, 1983).* Berlin : Heldermann, 1984 (Sigma Ser. Pure Math. 5), S. 197–222

[28] Erné, Marcel: Compact generation in partially ordered sets. In: *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)* 42 (1987), S. 69–83

[29] Erné, Marcel: Tensor Products for Bounded Posets Revisited. In: *Order* 7 (1990), Nr. 3, S. 295–314

[30] Erné, M[arcel]: The ABC of Order and Topology. In: *Category Theory at Work (Bremen, 1990)*. Berlin : Heldermann, 1991 (Res. Expo. Math. 18), S. 57–83

[31] Erné, Marcel: Bigeneration in Complete Lattices and Principal Separation in Ordered Sets. In: *Order* 8 (1991), Nr. 2, S. 197–221

[32] Erné, Marcel: The Dedekind-MacNeille Completion as a Reflector. In: *Order* 8 (1991), Nr. 2, S. 159–173

[33] Erné, Marcel: Algebraic Ordered Sets and Their Generalizations. In: Rosenberg, Ivo G. (Hrsg.) ; Sabidussi, Gert (Hrsg.): *Algebras and Orders (Montreal, PQ, 1991)*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993 (NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences 389), S. 113–192

[34] Erné, Marcel: *Adjunctions and Galois Connections: Origins, History and Development*. Kap. 1, S. 1–138. Siehe [18]

[35] Erné, Marcel: *Categories of Contexts*. 2005. – URL `http://www.iazd.uni-hannover.de/~erne/preprints/CatConts.pdf`

[36] Erné, Marcel: Closure. In: Mynard, Frédéric (Hrsg.) ; Pearl, Elliott (Hrsg.): *Beyond Topology*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2009 (Contemporary Mathematics 486), S. 163–238

[37] Erné, Marcel ; Gehrke, Mai ; Pultr, Aleš: Complete Congruences on Topologies and Down-set Lattices. In: *Applied Categorical Structures* 15 (2007), April, Nr. 1-2, S. 163–184

[38] Erné, M[arcel] ; Koslowski, J. ; Melton, A. ; Strecker, G. E.: A Primer on Galois Connections. In: *Papers on General Topology and Applications (Madison, WI, 1991)*. New York : The New York Academy of Science, 1993 (Annals of the New York Academy of Sciences 704), S. 103–125

[39] Erné, Marcel ; Wilke, Gerhard: Standard Completions for Quasiordered Sets. In: *Semigroup Forum* 27 (1983), Dezember, Nr. 1, S. 351–376

[40] Erné, Marcel ; Zhao, Dongsheng: $\mathcal{Z}$-join spectra of $\mathcal{Z}$-supercompactly generated lattices. In: *Applied Categorical Structures* 9 (2001), Nr. 1, S. 41–63

[41] Fuchs, L.: *Partially ordered algebraic systems*. Oxford : Pergamon Press, 1963 (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics 28)

[42] Galatos, Nikolaos ; Jipsen, Peter ; Kowalski, Tomasz ; Ono, Hiroakira: *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*. Amsterdam : Elsevier, 2007 (Studies in logic and the foundations of mathematics 151)

[43] Ganter, Bernhard: Relational Galois Connections. In: Kuznetsov, S. O. (Hrsg.) ; Schmidt, S. (Hrsg.): *Formal Concept Analysis (Clermont-Ferrand, 2007)*. Berlin : Springer, 2007 (Lecture Notes in Computer Science 4390), S. 1–17

[44] Ganter, Bernhard ; Wille, Rudolf: *Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen*. Berlin : Springer, 1996

[45] Gehrke, Mai: Generalized Kripke Frames. In: *Studia Logica* 84 (2006), November, Nr. 2, S. 241–275

[46] Gehrke, Mai ; Nagahashi, Hideo ; Venema, Yde: A Sahlqvist theorem for distributive modal logic. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 131 (2005), Nr. 1-3, S. 65–102

[47] Gierz, G. ; Hofmann, K. H. ; Keimel, K. ; Lawson, J. D. ; Mislove, M. ; Scott, D. S.: *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 93)

[48] Gool, Samuel J. van: *Methods for Canonicity*. Amsterdam, Masterarbeit, 2009

[49] Gray, John W.: *Formal Category Theory: Adjointness for 2-Categories*. Springer, 1974 (Lecture Notes in Mathematics 391)

[50] Hartonas, Chrysafis: Duality for Lattice-Ordered Algebras and for Normal Algebraizable Logics. In: *Studia Logica* 58 (1997), Nr. 3, S. 403–450

[51] Hartung, G.: An extended duality for lattices. In: *General algebra and applications (Potsdam, 1992)*. Berlin : Heldermann, 1993 (Res. Expo. Math. 20), S. 126–142

[52] Hofmann, Karl ; Watkins, Fred: The spectrum as a functor. In: Banaschewski, Bernhard (Hrsg.) ; Hoffmann, Rudolf-Eberhard (Hrsg.): *Continuous Lattices (Bremen, 1979)*. Berlin : Springer, 1981 (Lecture Notes in Mathematics 871), S. 249–263

[53] Jipsen, P[eter] ; Tsinakis, C.: A Survey of Residuated Lattices. In: Martínez, Jorge (Hrsg.): *Ordered algebraic structures (Florida, 2001)*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002 (Developments in Mathematics 7), S. 19–56

[54] Johnstone, Peter T.: *Stone spaces*. Cambridge : Cambridge University Press, 1982 (Cambridge studies in advanced mathematics 3)

[55] Jónsson, Bjarni ; Tarski, Alfred: Boolean algebras with operators. I. In: *American Journal of Mathematics* 73 (1951), Oktober, S. 891–939

[56] Jónsson, Bjarni ; Tarski, Alfred: Boolean algebras with operators. II. In: *American Journal of Mathematics* 74 (1952), Januar, S. 127–162

[57] Joyal, André ; Tierney, Myles: *An extension of the Galois theory of Grothendieck*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 1984

[58] Kelly, G. M.: Basic concepts of enriched category theory. In: *Reprints in Theory and Applications of Categories* (2005), Nr. 10. – URL `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`. – Reprinted from Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64, 1982

[59] Kent, Robert E.: Distributed Conceptual Structures. In: Swart, H. de (Hrsg.): *Relational Methods in Computer Science (Oisterwijk, 2001)*. Berlin : Springer, 2002 (Lecture Notes in Computer Science 2561), S. 104–123

[60] Krötzsch, Markus ; Hitzler, Pascal ; Zhang, Guo-Qiang: Morphisms in Context. In: Dau, F. (Hrsg.) ; Mugnier, M. L. (Hrsg.) ; Stumme, G. (Hrsg.): *Conceptual Structures: Common Semantics for Sharing Knowledge. 13th International Conference on Conceptual Structures, ICCS 2005 (Kassel, 2005).* Berlin : Springer, 2005 (Lecture Notes in Computer Science 3596), S. 223–237

[61] Kurtonina, Natasha ; Moortgat, Michael: Relational semantics for the Lambek-Grishin calculus. In: *Mathematics of Language*, 2007

[62] Lack, Stephen: A 2-Categories Companion. In: Baez, John C. (Hrsg.) ; May, J. P. (Hrsg.): *Towards Higher Categories.* New York, NY : Springer New York, 2010 (152), Kap. 4, S. 105–191

[63] Lawvere, F. W.: Adjoints in and among Bicategories. In: Ursini, Aldo (Hrsg.): *Logic and algebra (Pontignano, 1994).* New York : Marcel Dekker, 1996 (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 180), S. 181–189

[64] Lawvere, F. W.: Metric spaces, generalized logic, and closed categories. In: *Reprints in Theory and Applications of Categories* (2002), Nr. 1, S. 1–37. – URL `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/1/tr1abs.html`. – Reprinted from Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 43 (1973), 135–166

[65] Leinster, Tom: Basic Bicategories. (1998), Oktober. – URL `http://arxiv.org/abs/math/9810017`

[66] MacLane, Saunders: *Categories for the Working Mathematician.* Zweite Auflage. New York : Springer, 1998 (Graduate Texts in Mathematics 5)

[67] Markowsky, G. ; Rosen, B. K.: Bases for Chain-complete Posets. In: *IBM Journal of Research and Development* 20 (1976), Nr. 2, S. 138–147

[68] Moortgat, Michael: Symmetric Categorial Grammar. In: *Journal of Philosophical Logic* 38 (2009), Dezember, Nr. 6, S. 681–710

[69] Mori, Hideo: Functorial Properties of Formal Concept Analysis. In: Priss, Uta (Hrsg.) ; Polovina, Simon (Hrsg.) ; Hill, Richard (Hrsg.): *Conceptual Structures: Knowledge Architectures for Smart Applications.* Berlin : Springer, 2007 (Lecture Notes in Computer Science 4604), S. 505–508

[70] Mori, Hideo: Chu correspondences. In: *Hokkaido Mathematical Journal* 37 (2008), Nr. 1, S. 147–214

[71] Nelson, Evelyn: Galois connections as left adjoint maps. In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 17 (1976), Nr. 3, S. 523–541

[72] Ono, Hiroakira: Semantics for Substructural Logics. In: [84], S. 259–291

[73] Ono, Hiroakira: Substructural Logics and Residuated Lattices — an Introduction. In: Hendricks, V. F. (Hrsg.) ; Malinowski, J. (Hrsg.): *Trends in logic: 50 years of Studia Logica.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003 (Trends Log. Stud. Log. Libr. 21), S. 193–228

[74] Paoli, Francesco: *Substructural Logics: A Primer.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002 (Trends in Logic)

[75] Pedicchio, Maria C. (Hrsg.) ; Tholen, Walter (Hrsg.): *Categorical Foundations. Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory.* Cambridge University Press, 2004 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 97)

[76] Pigors, Adrian: *Categories of Generalized Frames.* Conference Talk (Topology, Algebra and Categories in Logic, Amsterdam). Juli 2009. – URL `http://www.illc.uva.nl/tacl09/`

[77] Pitts, Andrew M.: Applications of Sup-Lattice Enriched Category Theory to Sheaf Theory. In: *Proc. London Math. Soc.* s3-57 (1988), November, Nr. 3, S. 433–480

[78] Pratt, Vaughan: Chu Spaces. In: *School on Category Theory and Applications (Coimbra, 1999).* Coimbra : Universidade de Coimbra, 1999 (Textos Mat. Sér. B 21), S. 39–100. – URL `http://chu.stanford.edu/guide.html#coimbra`

[79] Pratt, Vaughan: Chu spaces from the representational viewpoint. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 96 (1999), März, Nr. 1-3, S. 319–333

[80] Restall, Greg: *An Introduction to Substructural Logics.* London : Routledge, 2000

[81] Rosebrugh, Robert ; Wood, R. J.: Constructive Complete Distributivity. IV. In: *Applied Categegorical Structures* 2 (1994), Nr. 2, S. 119–144

[82] Rosenthal, Kimmo I.: *Quantales and their applications.* Harlow : Longman Scientific & Technical, 1990 (Pitman Research Notes in Mathematics Series 234)

[83] Rosenthal, Kimmo I.: *The Theory of Quantaloids.* Addison Wesley Longman Ltd., 1996 (Pitman Research Notes in Mathematics Series 348)

[84] Schroeder-Heister, Peter (Hrsg.) ; Došen, Kosta (Hrsg.): *Substructural Logics.* Oxford : Clarendon Press, 1993

[85] Shmuely, Zahava: The structure of Galois connections. In: *Pacific Journal of Mathematics* 54 (1974), Nr. 2, S. 209–225

[86] Venugopalan, P.: Extensions of Galois connections. In: *Houston Journal of Mathematics* 16 (1990), Nr. 2, S. 249–254

[87] Wechler, Wolfgang: *Universal Algebra for Computer Scientists.* Berlin : Springer-Verlag, 1992 (EATCS Monographs on Theoretical Computer Science 25)

[88] Wood, R. J.: Ordered Sets via Adjunctions. In: [75], S. 5–47

[89] Wright, J. B. ; Wagner, E. G. ; Thatcher, J. W.: A uniform approach to inductive posets and inductive closure. In: *Theoretical Computer Science* 7 (1978), Nr. 1, S. 57–77

[90] Xia, Weiqun: *Morphismen als formale Begriffe. Darstellung und Erzeugung.* Aachen, Dissertation, 1993

Index

Lebenslauf

Adrian Pigors
Albertstr. 28
30451 Hannover

geboren am 24. 02. 1975 in Hannover

Ausbildung

1981 – 1985	Grundschule Halvestorf-Hope in Hameln
1985 – 1987	Orientierungsstufe West in Hameln
1987 – 1994	Viktoria-Luise-Gymnasium in Hameln, Allgemeine Hochschulreife
1994 – 1995	Zivildienst bei Aktion Eine Welt e. V. in Hameln
1995 – 2003	Studium der Mathematik (Diplom) mit Nebenfach Philosophie an der Universität Hannover, Diplomarbeit mit dem Titel: *Iterierte Reflexionsprinzipien*
seit 10/2004	Doktorand am Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Fakultät für Mathematik und Physik, Leibniz Universität Hannover, betreut von Prof. Dr. Marcel Erné

Berufliche Tätigkeiten

10/2003 – 05/2004	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Mathematik der Universität Hannover
04/2004 – 09/2005	Lehrbeauftragter am Philosophischen Seminar der Universität Hannover
06/2004 – 02/2005	Software-Entwickler bei der TEWIKO Software GmbH, Hameln
10/2004 – 09/2009	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Fakultät für Mathematik und Physik, Leibniz Universität Hannover

Ehrenamtliche Tätigkeit

04/2007 – 03/2009	Vertreter der Mitarbeitergruppe im Fakultätsrat der Fakultät für Mathematik und Physik, Leibniz Universität Hannover